

Zur Existenz der Dynamik in Bohmschen Systemen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der
Naturwissenschaften der Fakultät für Mathematik der
Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Karin Berndl

eingereicht im Oktober 1994

Referent: Prof. Dr. D. Dürr
Koreferent: Prof. Dr. H. Kalf
Tag der mündlichen Prüfung: 16. 2. 1995

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Bohmsche Mechanik	1
1.2	Überblick über den Inhalt dieser Arbeit	6
2	Existenz globaler Lösungen der Bohmschen Mechanik	10
2.1	Globale Lösungen der Schrödingergleichung	11
2.1.1	Lösungstheorie im Hilbertraum $L^2(\Omega)$	11
2.1.2	Regularität der Wellenfunktion	15
2.2	Die maximale Lösung der Bohmschen Gleichung	19
2.2.1	Existenz, Eindeutigkeit und Regularität	19
2.2.2	Die Kontinuitätsgleichung und die Äquivarianz von $ \psi ^2$	22
2.3	Eine hinreichende Bedingung für fast sichere globale Existenz der Teilchenbahnen	25
2.3.1	Die Grenzpunktmenge	25
2.3.2	Der Fluß durch Oberflächen	28
2.4	Ein Existenzsatz	38
2.5	Bemerkungen	48
3	Globale Existenz der Teilchenbahnen und Selbstadjungiertheit des Hamiltonoperators	55
3.1	Ein Existenzsatz für Bohmsche Mechanik in einer Dimension	55
3.2	Bemerkungen	59
4	Hilfssätze	64

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Bohmsche Mechanik

Die Bohmsche Mechanik ist eine physikalische Theorie für die Bewegung von Punktteilchen. Sie wurde von David Bohm im Jahre 1952 vorgeschlagen [B52]. Wir betrachten ein physikalisches System von N Teilchen mit Massen m_1, \dots, m_N . $\mathbf{Q}_k \in \mathbb{R}^\nu$ bezeichne den Ort des k -ten Teilchens. In der Regel wird die Dimension ν des physikalischen Raumes gleich 3 sein. Der Konfigurationsraum — das ist der Raum der zulässigen Konfigurationen $Q = (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_N)$ — werde mit Ω bezeichnet. Ω sei eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^d mit $d := \nu N$. Die Bewegung der Teilchen wird bestimmt durch die Schrödingersche Wellenfunktion ψ des Systems, eine komplexwertige Funktion auf dem Konfigurationsraum Ω : ψ erzeugt das Geschwindigkeitsfeld $v^\psi = (\mathbf{v}_1^\psi, \dots, \mathbf{v}_N^\psi)$ auf der Teilmenge von Ω , auf der $\psi \neq 0$ und differenzierbar ist, gemäß

$$\mathbf{v}_k^\psi(q) = \frac{\hbar}{m_k} \operatorname{Im} \frac{\nabla_k \psi(q)}{\psi(q)}. \quad (1.1)$$

$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_k}$ bezeichnet den ν -dimensionalen Gradienten bezüglich der k -ten Koordinate. Die Zeitentwicklung des N -Teilchensystems im Zustand (Q_t, ψ_t) ist demnach gegeben durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für die Konfiguration Q_t

$$\frac{dQ_t}{dt} = v^{\psi_t}(Q_t) \quad (1.2)$$

und die Schrödingergleichung für die Wellenfunktion ψ

$$i\hbar \frac{\partial \psi_t(q)}{\partial t} = \left(- \sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} \Delta_k + V(q) \right) \psi_t(q). \quad (1.3)$$

$\Delta_k = (\nabla_k)^2$ bezeichnet den ν -dimensionalen Laplaceoperator bezüglich der k -ten Koordinate, und V ist das Potential, eine reellwertige und glatte Funktion auf dem Konfigurationsraum Ω , $V \in C^\infty(\Omega)$. Wichtige Beispiele für Potentiale sind die N -Teilchen-Coulombwechselwirkung für Teilchen im \mathbb{R}^3 mit Ladungen e_i

$$V_{\text{Coulomb}}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{e_i e_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|} \quad (1.4)$$

und das N -Elektronen-, „Atom“

$$V_{\text{Atom}}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{|\mathbf{q}_i|} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{e_i e_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|}, \quad (1.5)$$

wobei der Kern, dessen Ladung $+1$ gesetzt wurde, aufgrund der im Vergleich zu den Elektronen sehr viel größeren Masse als im Ursprung ruhend angenähert wird, also wie ein äußeres Coulombfeld wirkt.

Das dynamische System „Bohmsche Mechanik“ ist mit einem natürlichen Maß ausgestattet, dem Maß mit der Dichte $|\psi_t|^2$ auf dem Konfigurationsraum Ω . Dies folgt daraus, daß $\rho_t(q) = |\psi_t(q)|^2$ die Kontinuitätsgleichung für die N -Teilchenbewegung erfüllt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(v^\psi \rho) = 0, \quad (1.6)$$

d.h. wenn die Konfiguration zu einer Zeit t_0 gemäß $|\psi_{t_0}|^2$ verteilt ist, so ist sie zu allen Zeiten t gemäß $|\psi_t|^2$ verteilt. Wir nennen diese Eigenschaft der $|\psi_t|^2$ -Verteilung „Äquivarianz“. Das äquivariante Maß spielt die Rolle eines Gleichgewichtsmaßes für Bohmsche Mechanik und definiert unseren Begriff von „typisch“: Wir sagen, eine Eigenschaft gilt *typischerweise* oder *für typische Anfangswerte* q_0 , wenn sie für $|\psi_0|^2$ -fast alle q_0 gilt. Aus der Bohmschen Mechanik kann die quantenmechanische Zufälligkeit abgeleitet werden: Typische Anfangskonfigurationen liefern in Serien von quantenmechanischen Experimenten¹ empirische Verteilungen, die sich der $|\psi|^2$ -Statistik annähern [DGZ92a].

¹ Was ein „quantenmechanisches Experiment“ ist, wird durch geeignete Bedingungen an die Wellenfunktion und ihre Zeitentwicklung definiert. Die „kollabierte“ Wellenfunktion der Quantenmechanik erscheint als „effektive“ oder „bedingte“ Wellenfunktion [DGZ92a].

Die Bohmsche Mechanik kann als Grundlegung der nichtrelativistischen Quantentheorie betrachtet werden. Die physikalische Bedeutung der quantenmechanischen Wellenfunktion ist seit der Entdeckung der Quantentheorie 1926 durch Schrödinger und Heisenberg umstritten. Alle Interpretationsvorschläge enthalten — ob als Grundprinzip oder als abgeleiteten Satz — die Bornsche Regel: $|\psi_t(q)|^2 dq$ ist die Wahrscheinlichkeit, zum Zeitpunkt t die Konfiguration in dq zu finden. Ein großer Teil der Problematik verbirgt sich hinter dem „finden“: Die Quantentheorie in ihrer Standardinterpretation, der sogenannten Kopenhagener Interpretation, macht nur Aussagen über die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Meßergebnissen. Aber, was ist eine Messung? Ist eine Messung nicht auch ein physikalischer Vorgang, der durch die Quantentheorie beschrieben werden sollte oder zumindest prinzipiell durch die Quantentheorie beschreibbar ist? Wenn man dies jedoch im Rahmen der durch die Wellenfunktion angeblich gegebenen *vollständigen* Beschreibung eines quantenmechanischen Systems versucht, stößt man auf das sogenannte Meßproblem. Die Wellenfunktion entwickelt aufgrund der Linearität der Zeitentwicklung im allgemeinen eine Überlagerung von Anteilen, die verschiedenen makroskopischen Zuständen — bestimmten Zeigerstellungen, Photoplatten mit Schwärzung jeweils an einer bestimmten Stelle, ... — entsprechen. Der Realzustand ist jedoch nur *einer*, nicht eine *Summe* dieser verschiedenen Zustände! Die Standard-Quantenmechanik antwortet auf diese Inkonsistenz mit dem sogenannten Kollaps- oder Reduktionspostulat: Die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Meßergebnisse sind durch die Wellenfunktion und die der Messung zugeordneten „Observablen“ bestimmt; nach der Messung wird die Wellenfunktion auf den zum Meßergebnis gehörenden Eigenraum der „Observablen“ projiziert. Die lineare, unitäre, deterministische Zeitentwicklung der Wellenfunktion wird unterbrochen durch den nichtlinearen, zufälligen Prozeß der Reduktion. An dieser Stelle ist bereits klar, daß die Quantentheorie keine „wohlformulierte“ Theorie ist, sofern sie als eigenständige Theorie verstanden wird, denn es wird nicht gesagt, was eine Messung ist. Viele Autoren sehen sich genötigt, aus diesem Dilemma abzuleiten, daß erst durch eine „Beobachtung“ (manchmal wird sogar ein „Bewußtsein“ gefordert) eine Messung abgeschlossen wird, und fordern tiefgreifende Änderungen des klassischen Weltbildes, wie etwa die Nichtexistenz einer objektiven physikalischen Realität.²

Sobald nicht mehr auf der Vollständigkeit der Wellenfunktion als Zustandbeschreibung für quantenmechanische Systeme beharrt wird, lösen sich alle mit

² Ungewöhnlich klare Darstellungen der Grundlagenprobleme der Quantentheorie und möglicher Lösungen findet man bei [Bell] und [Alb92].

dem Meßproblem zusammenhängenden Probleme der nichtrelativistischen Quantentheorie auf denkbar einfache Weise. Was ist naheliegender, als die *Orte der N Teilchen* mit in die Zustandsbeschreibung aufzunehmen und die Wellenfunktion als Führungsfeld zu interpretieren? Der Realzustand, auch derjenige von makroskopischen Objekten wie z.B. Meßapparaten, ist zu jeder Zeit bestimmt, unabhängig von willkürlichen Entscheidungen, welche physikalischen Vorgänge als Messungen zu betrachten sind und wann diese abgeschlossen sind. Der „Kollaps“ der Wellenfunktion nach einer Messung kommt in der Theorie nicht vor; seine Berechtigung für die Berechnung der gemeinsamen Verteilung von Meßergebnissen in einer Serie von Messungen wird jedoch erklärt. Die Bornsche Regel für die quantenmechanische Zufälligkeit *folgt* aus Bohmscher Mechanik für „typische Universen“, wie oben bereits erwähnt wurde. Die Beziehung zwischen Quantenmechanik und Bohmscher Mechanik ist ähnlich wie die zwischen klassischer statistischer Mechanik und Newtonscher Mechanik: Die statistischen Aussagen der Quantenmechanik bzw. der statistischen Mechanik werden aus einer tieferliegenden Theorie — der Bohmschen bzw. Newtonschen Mechanik — abgeleitet und auf diese Weise erklärt.

Betrachten wir das Paradigma der Quantentheorie, das Doppelspaltexperiment. Eine ebene Welle fällt auf einen Doppelspalt. Auf dem Schirm entsteht Punkt für Punkt das Interferenzbild. Wenn man einen der Spalte schließt, ergibt sich kein Interferenzbild, sondern lediglich eine breite Verteilung. Üblicherweise wird hieraus abgeleitet, daß es zu Widersprüchen führt, anzunehmen, das Teilchen geht im Doppelspaltexperiment durch einen der Spalte und trifft auf dem Schirm auf, auf dem es zum Interferenzbild beiträgt, vgl. z.B. Heisenberg ([Hei], S. 52); oder noch weitergehend, daß Aussagen über quantenmechanische Experimente die Regeln der klassischen Logik verletzen, vgl. z.B. Feynman ([Fey], S. 140). Beide Autoren gehen nicht auf die Bohmsche Mechanik ein, die die zitierten Behauptungen widerlegt.

In Bohmscher Mechanik versteht man die Beobachtungen beim Doppelspaltexperiment wie folgt: Die Wellenfunktion ψ entwickelt das Interferenzmuster, und die Teilchen bewegen sich auf den durch ψ gemäß (1.1) bestimmten Bahnen, siehe Abbildung 1.1. Wenn nur einer der Spalte offen ist, entwickelt die Wellenfunktion keine Interferenz. Analog finden sämtliche quantenmechanischen Phänomene eine einfache, anschauliche Erklärung durch Bohmsche Mechanik.

Abgesehen von der Motivation der Bohmschen Mechanik über die Frage nach der physikalischen Bedeutung der Wellenfunktion, über das Meßproblem, über Fragen, die häufig als „philosophische“ Fragen abgetan werden, sowie über die Suche

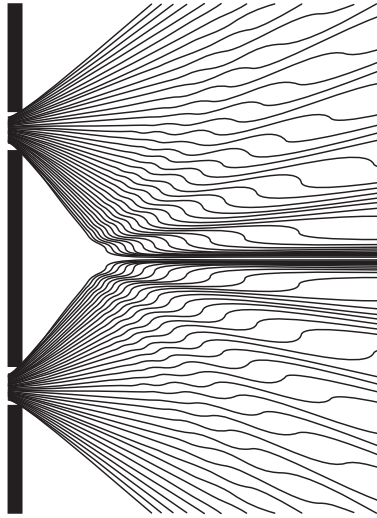


Abbildung 1.1 Bohmsche Teilchenbahnen beim Doppelspaltexperiment, nach [PhDeHi].

nach einem intuitiven Verständnis der quantenmechanischen Phänomene, besteht auf der Ebene der nichtrelativistischen Quantentheorie die entscheidende Überlegenheit der Bohmschen Mechanik gegenüber der Standardinterpretation darin, den Begriff der „Messung“, des quantenmechanischen Experimentes, zu klären, und den quantenmechanischen Formalismus mit selbstadjungierten Operatoren als „Observablen“ zu begründen und zu erweitern [Da, DaDGZ].

Für eine gründliche Analyse der Bohmschen Mechanik siehe [BHi93, DGZ92a, DaDGZ, Hol]. [DGZ92b] gibt einen Überblick über [DGZ92a]. [Alb94] und [GL] sind neuere Einführungen in die Bohmsche Mechanik und in die Probleme der Quantentheorie. Auch für „Teilchen mit Spin“ sowie für „identische Teilchen“ kann Bohmsche Mechanik formuliert werden [BHi93, Bell, Hol, DGZ94]. Zur Problematik einer lorentzinvarianten „Bohmschen Theorie“ siehe [BHi93, Bell, DGZ90, Hol, Har92, BeG, Har94, BeDGZ].

1.2 Überblick über den Inhalt dieser Arbeit

Wir untersuchen das Problem der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems in Bohmscher Mechanik, d.h. die Frage, ob für eine gegebene Anfangskonfiguration Q_0 und Anfangswellenfunktion ψ_0 zu einer bestimmten Zeit t_0 eindeutige und globale Lösungen (Q_t, ψ_t) von (1.2, 1.3) mit $Q_{t_0} = Q_0$ und $\psi_{t_0} = \psi_0$ existieren.

Die Frage nach der Existenz einer globalen Lösung der Schrödingergleichung wird in Abschnitt 2.1 behandelt. Dabei stellen wir zunächst die Lösungstheorie im Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ dar. Wenn der Hamiltonoperator $H = -\sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} \Delta_k + V(q)$, der zunächst nur für zweimal differenzierbare Funktionen in \mathcal{H} erklärt ist, geeignet zu einem selbstadjungierten Operator erweitert werden kann, ist $\psi_t = U_t \psi_0$ mit $U_t = e^{-itH/\hbar}$ die globale und eindeutige Lösung der Schrödingergleichung. Um allerdings das Geschwindigkeitsfeld gemäß (1.1) bilden zu können, muß die Wellenfunktion differenzierbar sein. Wir zeigen in Abschnitt 2.1.2, wie man unter geeigneten Regularitätsbedingungen an das Potential für eine gewisse Klasse von Anfangswellenfunktionen genügend Regularität von ψ erhält, so daß auf einer geeigneten Teilmenge der Konfigurationsraum-Zeit $\Omega \times \mathbb{R}$ zumindest die Existenz lokaler Lösungen der Bohmschen Gleichung (1.2) garantiert ist.

In Abschnitt 2.2 beginnen wir mit der Analyse der Bohmschen Gleichung. Das Geschwindigkeitsfeld v^ψ (1.1) ist singular an den Nullstellen („Knoten“) der Wellenfunktion ψ . Um globale Existenz sicherzustellen, muß gezeigt werden, daß diese Punkte in endlicher Zeit (fast sicher) nicht erreicht werden. Zusätzlich muß ausgeschlossen werden, daß Teilchen den Rand des Konfigurationsraums Ω — in der Regel ist $\partial\Omega$ die Menge der Singularitäten des Potentials — bzw. Unendlich in endlicher Zeit erreichen.

Das analoge Problem der globalen Existenz der Dynamik im N -Körperproblem der Newtonschen Gravitation ist ein klassisches Problem der mathematischen Physik, das mit den verschiedensten Methoden beleuchtet wurde [Mos, Dia]. Zusätzlich zu Kollisionssingularitäten treten im N -Körperproblem mit $N > 3$ sogenannte „Pseudokollisionen“ auf, bei denen das System in endlicher Zeit explodiert. Beispiele derartiger Katastrophen sind von Mather und McGehee [MaMcG],³ von Gerver [Ger] und von Xia [Xia] konstruiert worden. In spezi-

³ In diesem (eindimensionalen) Beispiel explodiert das System jedoch erst nach unendlich vielen Zweierstößen; es handelt sich also nicht um eine echte Pseudokollision.

ellen Situationen — wie etwa für ein fast planares Sonnensystem mit schwach exzentrischen Planeten — liefert das KAM-Theorem unter anderem die globale Existenz der Dynamik für eine Menge von Anfangswerten, die positives Maß hat (siehe z.B. [Arn]). Im allgemeinen Fall des N -Körperproblems mit $N \geq 5$ — für das 4-Körperproblem hat Saari [Saa] die (fast sichere und generische) globale Existenz gezeigt — ist bis heute offen, ob die Newtonsche Dynamik für fast alle Anfangswerte global existiert, oder ob Pseudokollisionen auf einer Menge positiven Maßes auftreten können.

In der Bohmschen Mechanik gelingt es, die Wahrscheinlichkeit, die Singularitäten des Geschwindigkeitsfeldes oder den Rand des Konfigurationsraums zu erreichen, durch das Verhalten des (Raum-Zeit-)Flusses

$$J^\psi(q, t) = (j^{\psi_t}(q), |\psi_t(q)|^2), \quad \text{wobei} \quad j^{\psi_t}(q) = v^{\psi_t}(q) |\psi_t(q)|^2 \quad (1.7)$$

den quantenmechanischen „Wahrscheinlichkeitsstrom“ bezeichnet, in den kritischen Bereichen zu kontrollieren. In Abschnitt 2.3.2 zeigen wir, daß das Integral über den Absolutbetrag des Flusses über eine Hyperfläche in Konfigurationsraum-Zeit eine Schranke für die Wahrscheinlichkeit, diese Hyperfläche zu kreuzen, darstellt. Aus dem Flußintegral über die Oberfläche einer geeigneten (Folge von) Umgebungen um die Singularitäten des Geschwindigkeitsfeldes und den Rand des Konfigurationsraums kann folglich eine hinreichende Bedingung für die Existenz globaler Lösungen der Bohmschen Mechanik (für fast alle Anfangswerte) abgeleitet werden.

Abschnitt 2.4 enthält unser Hauptresultat: Wir zeigen für eine sehr große Klasse von Potentialen einschließlich der physikalisch wichtigen N -Teilchen-Coulombwechselwirkung mit beliebigen Massen und Ladungen, daß Lösungen der Bohmschen Mechanik global existieren für typische Anfangskonfigurationen Q_0 und Anfangswellenfunktionen ψ_0 , die C^∞ -Vektoren des selbstadjungierten Hamiltonoperators sind.

In Kapitel 3 diskutieren wir verschiedene Aspekte der Selbstadjungiertheit des Hamiltonoperators aus der Perspektive der Bohmschen Mechanik. Insbesondere zeigen wir die Existenz globaler Lösungen der Bohmschen Mechanik in einer Dimension unter Voraussetzungen, die in gewisser Hinsicht schwächer als die unseres Hauptresultates von oben sind.

Dies ist die erste Arbeit, die einer Untersuchung des Problems der Existenz der Dynamik in Bohmscher Mechanik gewidmet ist. Für die verwandte Theorie von Nelson, stochastische Mechanik, wurde die analoge Frage von Nelson [Nel85]

und Carlen [Car] untersucht. Das offensichtliche Problem der Singularitäten des Bohmschen Geschwindigkeitsfeldes bei den Knoten der Wellenfunktion ψ wurde von Bohm ([B52], S. 174) und Holland ([Hol], Abschnitt 3.3.8) angesprochen. Bohm argumentiert, daß die Teilchen entweder von den Nullstellen der Wellenfunktion unendlich stark abgestoßen werden oder diese mit unendlicher Geschwindigkeit durchlaufen. (Bohms Punkt war hier aber nicht die Existenz der Dynamik, sondern die Konsistenz mit $\rho = |\psi|^2$: Die Teilchen halten sich nicht bei den Nullstellen der Wellenfunktion auf.) Holland behauptet, gezeigt zu haben, daß die Nullstellen der Wellenfunktion überhaupt nicht erreicht werden können, außer wenn ein Teilchen bereits in einer Nullstelle startet. Sein Argument ist jedoch zirkulär, denn es setzt die Regularität des Geschwindigkeitsfeldes bei den Knoten voraus.

Wir geben ein sehr einfaches Beispiel für eine Situation, bei der tatsächlich einige Trajektorien in Nullstellen der Wellenfunktion hineinlaufen — Hollands Behauptung widerlegend —, eine davon sogar mit Geschwindigkeit 0 — im Widerspruch zu Bohms Vorstellung.

Beispiel 1.1 Man betrachte den eindimensionalen harmonischen Oszillator (mit $\hbar = m = \omega = 1$) $H = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}x^2$ und nehme als Anfangswellenfunktion eine Überlagerung des Grundzustandes und des zweiten angeregten Zustandes:

$$\psi_t(q) = e^{-q^2/2} \left(1 + (1 - 2q^2)e^{-2it} \right) e^{-it/2}. \quad (1.8)$$

Diese Wellenfunktion hat Nullstellen unter anderem bei $(q, t) = (0, (n + 1/2)\pi)$ für alle ganzen Zahlen n . Das mit dieser Wellenfunktion gebildete Geschwindigkeitsfeld ist eine ungerade Funktion von q . Deshalb ist die Konstante $Q_t = 0$ für $t \neq (n + 1/2)\pi$ eine Trajektorie, die für $t \rightarrow (n + 1/2)\pi$ (mit Geschwindigkeit 0) in Knoten der Wellenfunktion hineinläuft. Sie kann natürlich durch die Knoten hindurch fortgesetzt werden. Wir analysieren dieses Beispiel weiter in Bemerkung 2.34.

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. Detlef Dürr sehr herzlich für die Anregung und ausgezeichnete Betreuung dieser Arbeit, ferner für alles, was ich in unzähligen Gesprächen von ihm gelernt habe, und für die Unterstützung, die ich von ihm erfahren habe. Herrn Prof. Dr. Sheldon Goldstein, der mich während meines Aufenthaltes an der Rutgers University betreut hat, danke ich sehr herzlich für seine außergewöhnliche Hilfsbereitschaft und anregende Kritik. Für viele wertvolle Hinweise und Diskussionen danke ich Herrn Prof. Dr. Nino Zanghì, Martin Daumer, Dr. Jürgen Weckler, Dr. Lucien Hardy, Lara Beraha und Markus Schneider.

Finanziell wurde ich durch Promotionsstipendien der Universität München sowie des Graduiertenkollegs „Mathematik in ihrer Wechselwirkung mit der Physik“ gefördert. Mein Auslandsaufenthalt wurde durch ein Zusatzstipendium des DAAD sowie durch die Gastfreundschaft der Rutgers University ermöglicht. Auch diesen Institutionen sei hiermit herzlich gedankt.

Kapitel 2

Existenz globaler Lösungen der Bohmschen Mechanik

Wir untersuchen in diesem Kapitel das Problem der Existenz und Eindeutigkeit von globalen Lösungen der durch die Gleichungen (1.1, 1.2, 1.3) definierten Bohmschen Mechanik für ein System von N spinlosen Teilchen. Zu einer Zeit t_0 seien Anfangswerte Q_0 und ψ_0 gegeben. Wegen der Zeittranslationsinvarianz der Bohmschen Mechanik kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $t_0 = 0$ gesetzt werden, denn mit einer Lösung (Q_t, ψ_t) von (1.2, 1.3) zu Anfangswerten $Q_{t_0} = Q_0$ und $\psi_{t_0} = \psi_0$ ist auch $(\tilde{Q}_t = Q_{t_0+t}, \tilde{\psi}_t = \psi_{t_0+t})$ eine Lösung zu Anfangswerten $\tilde{Q}_0 = Q_0$ und $\tilde{\psi}_0 = \psi_0$. Das Differentialgleichungssystem (1.2, 1.3) zeichnet sich dadurch aus, daß die Schrödingergleichung (1.3) unabhängig von der Teilchenbahn Q_t ist, während die Integration der Gleichung (1.2) für die Teilchenbewegung die Kenntnis der Wellenfunktion ψ_t erfordert. Deshalb beginnen wir mit der Untersuchung der Schrödingergleichung.

2.1 Globale Lösungen der Schrödinger- gleichung

2.1.1 Lösungstheorie im Hilbertraum $L^2(\Omega)$

Wir betrachten, wie üblich, die Schrödingergleichung zunächst als (gewöhnliche) Differentialgleichung auf dem separablen Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = H\psi. \quad (2.1)$$

Der Hamiltonoperator H ist eine geeignete Erweiterung des minimalen Hamiltonoperators

$$H_{\min} = - \sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} \Delta_k + V, \quad V \in C^\infty(\Omega), \quad \mathcal{D}(H_{\min}) = C_0^\infty(\Omega). \quad (2.2)$$

Als Definitionsbereich von H_{\min} wurde $\mathcal{D}(H_{\min}) = C_0^\infty(\Omega)$, die Menge der C^∞ -Funktionen mit kompaktem Träger in Ω gewählt. Diese Menge ist dicht in $L^2(\Omega)$, und der Hamiltonoperator ist symmetrisch auf diesem Definitionsbereich. Wenn man eine *selbstadjungierte Erweiterung* H von H_{\min} mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(H)$ finden kann, so ist der Hamiltonoperator H der Generator der einparametrischen unitären Gruppe $U_t := e^{-itH/\hbar}$, und für alle $\psi_0 \in \mathcal{D}(H)$ ist $\psi_t := U_t\psi_0$ die eindeutig bestimmte globale Lösung der Schrödingergleichung im L^2 -Sinn (2.1) (siehe z.B. [Wei], Abschnitt 7.6).

Man erhält also die Existenz von globalen Lösungen der Schrödingergleichung, indem man zeigt, daß der betrachtete Hamiltonoperator H_{\min} eine selbstadjungierte Erweiterung hat. Weil H_{\min} ein reeller Operator ist, d.h. $C\mathcal{D}(H_{\min}) = \mathcal{D}(H_{\min})$ und $CH_{\min} = H_{\min}C$ auf $\mathcal{D}(H_{\min})$, wobei C die komplexe Konjugation bezeichnet, gibt es nach einem Theorem von von Neumann selbstadjungierte Erweiterungen (siehe z.B. [RSII], Thm. X.3). Nun stellt sich natürlich die Frage, unter welchen Bedingungen es eine eindeutige oder eine ausgezeichnete Erweiterung gibt. Für eine sehr große Klasse von Potentials gibt es hierauf eine befriedigende Antwort [Kato51, Kato66, RSI, RSII, Wei, Far, Sim77, Sim71]. Wir erwähnen einige wichtige Begriffe und Sätze und legen die Notation fest.

Wir bezeichnen das Skalarprodukt von Vektoren $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ mit (ϕ, ψ) und die Norm eines Vektors $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\|\psi\|$. Das euklidische Skalarprodukt von Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ wird mit $x \cdot y$, die euklidische Norm eines Vektors

$x \in \mathbb{R}^n$ (oder auch \mathbb{C}^n), $n \geq 1$, wird mit $|x|$ bezeichnet. Alle vorkommenden Operatoren A, B, \dots, H, V, \dots sind dicht definierte lineare Abbildungen von $\mathcal{D}(A), \mathcal{D}(B), \dots \subset \mathcal{H}$ nach \mathcal{H} . Wir bezeichnen quadratische Formen mit kleinen Buchstaben: q, r, \dots , und deren Definitionsbereiche mit $\mathcal{Q}(q), \mathcal{Q}(r), \dots$. Die zu einem Operator A gehörende quadratische Form wird mit q_A bezeichnet und definiert als $q_A(\phi, \psi) := (\phi, A\psi)$ für $\phi, \psi \in \mathcal{Q}(q_A) := \mathcal{D}(A)$. Wenn der Operator als Multiplikationsoperator gegeben ist, wie beispielsweise das Potential V , oder mittels Spektralsatz jeder selbstadjungierte Operator, kann die zugeordnete quadratische Form auf dem größeren Bereich

$$\mathcal{Q}(V) := \mathcal{Q}(q_V) := \left\{ \psi \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} |V(q)| |\psi(q)|^2 dq < \infty \right\},$$

$\mathcal{Q}(V) \supset \mathcal{D}(V)$, definiert werden, und für $\phi, \psi \in \mathcal{Q}(V)$ ist

$$q_V(\phi, \psi) := \int_{\Omega} \phi^*(q) V(q) \psi(q) dq.$$

Man erkennt, daß der Formdefinitionsbereich $\mathcal{Q}(q_A)$ unter $U_t = e^{-itA}$ invariant ist, und daß $q_A(U_t\phi, U_t\psi) = q_A(\phi, \psi)$ ist. Man schreibt oft auch $(\phi, A\psi)$ für $q_A(\phi, \psi)$, wobei zu beachten ist, daß das einen Mißbrauch der Notation darstellt: Nur falls $\psi \in \mathcal{D}(A)$ ist, handelt es sich hier wirklich um das Skalarprodukt im Hilbertraum \mathcal{H} . Wenn q eine nach unten beschränkte abgeschlossene dicht definierte quadratische Form ist, so ist der assoziierte Operator A mit

$$\mathcal{D}(A) = \{ \phi \in \mathcal{Q}(q) : \exists \tilde{\phi} \in \mathcal{H} \text{ mit } q(\phi, \psi) = (\tilde{\phi}, \psi) \forall \psi \in \mathcal{Q}(q) \}, \quad A\phi = \tilde{\phi}$$

selbstadjungiert und nach unten beschränkt.

Der freie Hamiltonoperator $H_0 = -\sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} \Delta_k$ auf $\Omega = \mathbb{R}^d$ ist selbstadjungiert auf $\mathcal{D}(H_0) = \{ \phi \in \mathcal{H} : |k|^2 \hat{\phi}(k) \in L^2(\mathbb{R}^d) \}$, wobei $\hat{\phi}$ die Fouriertransformierte von ϕ bezeichnet (siehe z.B. [Wei], Kapitel 10). Der Definitionsbereich der Form q_{H_0} ist $\mathcal{Q}(H_0) = \{ \phi \in \mathcal{H} : |k| \hat{\phi}(k) \in L^2(\mathbb{R}^d) \}$.

Ein Operator B heißt *A-beschränkt*, falls (i) $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$ und (ii) es gibt $\gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $\phi \in \mathcal{D}(A)$

$$\|B\phi\| \leq \gamma \|A\phi\| + \delta \|\phi\|. \quad (2.3)$$

Das Infimum $\tilde{\gamma} := \inf \{ \gamma > 0 : \exists \delta > 0 \text{ so daß (2.3) gilt} \}$ heißt *relative Schranke* von B bezüglich A .

Kato-Rellich-Theorem (siehe z.B. [RSII], Thm. X.12) *A sei selbstadjungiert, B sei symmetrisch und A-beschränkt mit relativer Schranke $\tilde{\gamma} < 1$. Dann ist $A + B$ selbstadjungiert auf $\mathcal{D}(A)$ und wesentlich selbstadjungiert auf jedem determinierenden Bereich¹ von A. Wenn A nach unten beschränkt ist, ist $A + B$ auch nach unten beschränkt.*

Eine wichtige Anwendung dieses Satzes beruht auf dem folgenden Resultat von Kato [Kato51]: Es sei $\Omega = \mathbb{R}^3$, $V = V_1 + V_2$ mit $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und $V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ (kurz: $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$) reellwertig. Dann ist V H_0 -beschränkt mit relativer Schranke 0, und folglich ist $H = H_0 + V$ selbstadjungiert auf $\mathcal{D}(H_0)$ und wesentlich selbstadjungiert auf jedem determinierenden Bereich von H_0 , beispielsweise auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ oder auf $S(\mathbb{R}^3)$, dem Schwartzschen Raum der schnell abfallenden Funktionen.

Hieraus folgt die wesentliche Selbstadjungiertheit des Hamiltonoperators für ein Teilchen im Coulombfeld $V = -e^2/r$ (das „Wasserstoffatom“) auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ und analog die des Hamiltonoperators für N Teilchen, die über Coulombpotentiale paarweise miteinander wechselwirken: $V = V_{\text{Coulomb}}$ (1.4) oder $V = V_{\text{Atom}}$ (1.5) auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^{3N})$. Allgemeiner fallen alle singulären Paarwechselwirkungspotentiale der Form $r^{-\alpha}$ mit $0 < \alpha < 3/2$, wobei r den Abstand von je zwei Teilchen im \mathbb{R}^3 bezeichnet, unter die Klasse der H_0 -beschränkten Potentiale.

q_A sei die quadratische Form eines positiven selbstadjungierten Operators A . r sei eine symmetrische quadratische Form mit (i) $\mathcal{Q}(r) \supset \mathcal{Q}(A)$ und (ii) es gibt $\gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $\phi \in \mathcal{Q}(A)$

$$|r(\phi, \phi)| \leq \gamma q_A(\phi, \phi) + \delta(\phi, \phi). \quad (2.4)$$

Dann heißt r *A-formbeschränkt*. Das Infimum $\tilde{\gamma} := \inf\{\gamma > 0 : \exists \delta > 0 \text{ so daß (2.4) gilt}\}$ heißt *relative Formschranke* von r bezüglich A .

KLMN-Theorem (Kato-Lions-Lax-Milgram-Nelson, siehe z.B. [RSII], Thm. X.17) *A sei ein positiver selbstadjungierter Operator, und r sei eine symmetrische A-formbeschränkte quadratische Form mit relativer Formschranke $\tilde{\gamma} < 1$. Dann ist $q_A + r$ auf $\mathcal{Q}(q_A + r) = \mathcal{Q}(A)$ die quadratische Form eines eindeutigen selbstadjungierten Operators C , d.h. $\mathcal{Q}(C) = \mathcal{Q}(A)$ und*

$$q_C(\phi, \psi) = q_A(\phi, \psi) + r(\phi, \psi)$$

¹ Für einen abgeschlossenen Operator A heißt $D \subset \mathcal{D}(A)$ ein *determinierender Bereich* (engl. *core*) von A , wenn $\overline{A|_D} = A$.

für alle $\phi, \psi \in \mathcal{Q}(C)$. C ist nach unten beschränkt, und jeder determinierende Bereich für A ist ein Form-determinierender Bereich für C .

A sei ein positiver selbstadjungierter Operator, B sei selbstadjungiert. Wenn B A -beschränkt ist mit relativer Schranke $\tilde{\gamma}$, dann ist B auch A -formbeschränkt mit relativer Formschranke $\tilde{\gamma}$ (siehe z.B. [RSII], Thm. X.18). Wenn $\tilde{\gamma} < 1$ ist, kann folglich $A + B$ sowohl mit Hilfe des Kato-Rellich-Theorems als auch mit Hilfe des KLMN-Theorems definiert werden. Wir bezeichnen die Operatoren mit $(A + B)_{\text{KR}}$ bzw. $(A + B)_{\text{KLMN}}$. Man liest an der Definition des zur quadratischen Form $q_A + q_B$ assoziierten Operators $(A + B)_{\text{KLMN}}$ ab, daß $\mathcal{D}((A + B)_{\text{KLMN}}) \supset \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}((A + B)_{\text{KR}})$ und $(A + B)_{\text{KLMN}} = A + B$ auf $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ (vgl. z.B. [Far]). Es folgt $(A + B)_{\text{KLMN}} = (A + B)_{\text{KR}}$.

Potentiale aus der Klasse $V \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ sind H_0 -formbeschränkt mit relativer Formschranke $\tilde{\gamma} = 0$. Damit ist für Paarwechselwirkungspotentiale der Form $r^{-\alpha}$ mit $0 < \alpha < 2$ — für die der Hamiltonoperator nach unten beschränkt ist — eine natürliche selbstadjungierte Erweiterung gegeben (siehe z.B. [RSII], Thm. X.19).

Formsumme nach unten beschränkter Operatoren (siehe z.B. [Far]) *Seien A und B zwei nach unten beschränkte selbstadjungierte Operatoren, für die $\mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(B)$ dicht in \mathcal{H} ist. Dann ist $q_C = q_A + q_B$ auf $\mathcal{Q}(C) = \mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(B)$ die quadratische Form eines eindeutigen selbstadjungierten nach unten beschränkten Operators C .*

Die folgende Kombination aus dem KLMN-Theorem und dem Satz über die Formsumme wird sich für unseren Zugang als nützlich erweisen:

Korollar 2.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sei offen, $\Omega^c = \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ sei eine Nullmenge bezüglich des d -dimensionalen Lebesgue-Maßes. $V = V_1 + V_2$, wobei $V_1, V_2 \in C^\infty(\Omega)$, V_1 nach unten beschränkt und V_2 H_0 -formbeschränkt mit relativer Schranke $\tilde{\gamma} < 1$ sei. Dann ist die Formsumme $H = H_0 + V$ eine selbstadjungierte Erweiterung von H_{\min} .

Beweis $C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{Q}(H_0) \cap \mathcal{Q}(V_1) \cap \mathcal{Q}(V_2)$ ist dicht in $\mathcal{H} = L^2(\Omega) = L^2(\mathbb{R}^d)$. Die quadratische Form $q_{H_0} + q_{V_1} + q_{V_2}$ ist abgeschlossen auf $\mathcal{Q}(H_0) \cap \mathcal{Q}(V_1) \cap \mathcal{Q}(V_2) = \mathcal{Q}(H_0) \cap \mathcal{Q}(V_1)$ gemäß dem KLMN-Theorem und dem Satz über die Formsumme nach unten beschränkter Operatoren. (Hierbei ist es gleichgültig, ob man $(H_0 + V_2) + V_1$ oder $(H_0 + V_1) + V_2$ bildet, denn aus der H_0 -Formbeschränktheit von V_2 folgt die $(H_0 + V_1)$ -Formbeschränktheit.) Aus der Definition des zur quadratischen

Form $q_{H_0} + q_{V_1} + q_{V_2}$ assoziierten selbstadjungierten Operators H , der Formsumme $H_0 + V$, folgt $\mathcal{D}(H) \supset \mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(V_1) \cap \mathcal{D}(V_2) \supset C_0^\infty(\Omega)$; H ist also eine selbstadjungierte Erweiterung von H_{\min} . \square

Katos Resultat gilt als „Lösung“ des N -Körperproblems in nichtrelativistischer Quantenmechanik, d.h. des Problems der Existenz und Eindeutigkeit globaler Lösungen der Schrödingergleichung für ein System von N Teilchen, die paarweise über Coulombpotentiale miteinander wechselwirken, $V = V_{\text{Atom}}$ oder $V = V_{\text{Coulomb}}$. Dieses Resultat steht im Gegensatz zur Situation in der klassischen Mechanik, wo, wie in der Einleitung dargestellt wurde, das N -Körperproblem im allgemeinen Fall „ungelöst“ ist. Es sei allerdings betont, daß der „natürliche“ minimale Hamiltonoperator (2.2), von dem wir ausgehen, für die N -Teilchen-Coulombwechselwirkung mit dem größtmöglichen $\Omega = \mathbb{R}^{3N} \setminus \bigcup_{i=1}^N \bigcup_{j=i+1}^N \{\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j\}$ *nicht* wesentlich selbstadjungiert ist.² Kato erreicht die Eindeutigkeit der selbstadjungierten Erweiterung (und damit die der unitären Zeitentwicklung) dadurch, daß er das Wechselwirkungspotential als kleine Störung des freien Hamiltonoperators $H = H_0$ auffaßt und als minimalen Definitionsbereich $C_0^\infty(\mathbb{R}^{3N})$ statt $C_0^\infty(\Omega)$ wählt. Natürlich ist Katos Erweiterung ausgezeichnet unter allen (unendlich vielen) möglichen selbstadjungierten Erweiterungen von H_{\min} für die N -Teilchen-Coulombwechselwirkung. Insbesondere stimmt, wie oben dargestellt, die Formsumme aus Korollar 2.1 mit Katos Erweiterung überein. Wir gehen in Bemerkung 3.5 weiter auf dieses Problem aus dem Gesichtspunkt der Bohmschen Mechanik ein.

2.1.2 Regularität der Wellenfunktion

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß unter den folgenden Voraussetzungen ψ genügend glatt ist, um zumindest lokal durch Gleichung (1.1) ein glattes Geschwindigkeitsfeld zu erzeugen:

- A1:** $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sei offen, $V \in C^\infty(\Omega)$;
- A2:** H sei eine beliebige selbstadjungierte Erweiterung des Operators H_{\min} ;
- A3:** $\psi_0 \in C^\infty(H)$ und $\|\psi_0\| = 1$.

² Weil V H_0 -beschränkt mit $\tilde{\gamma} = 0$ ist, ist V auch H -beschränkt mit $\tilde{\gamma} = 0$ (vgl. den Beweis von Korollar 2.22). Aus dem Kato-Rellich-Theorem folgt damit, daß, wenn H wesentlich selbstadjungiert auf $C_0^\infty(\Omega)$ wäre, H_0 auch wesentlich selbstadjungiert auf $C_0^\infty(\Omega)$ wäre. Zu zeigen ist also, daß H_0 nicht wesentlich selbstadjungiert auf $C_0^\infty(\Omega)$ ist. Dies kann man daraus ableiten, daß $-\Delta$ nicht wesentlich selbstadjungiert auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ ist, vgl. z.B. [RSII] S. 161.

An den Singularitäten des Potentials kann man nicht erwarten, daß die Wellenfunktion differenzierbar ist, wie man an folgendem Beispiel sofort sieht: Die Grundzustandswellenfunktion eines Teilchens im Coulombpotential $V(q) = -1/r$ (des „Wasserstoffatoms“) hat in Kugelkoordinaten die Gestalt $\psi(r) = e^{-r}$, ist also am Ort der Potentialsingularität bei $r = 0$ nicht differenzierbar.

Die Menge $C^\infty(H) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(H^n)$ der sogenannten C^∞ -Vektoren des selbstadjungierten Operators H ist dicht in $L^2(\Omega)$ und invariant unter der Zeitentwicklung $e^{-itH/\hbar}$. Deshalb stellt sie auch einen determinierenden Bereich dar, d.h. der Hamiltonoperator H ist wesentlich selbstadjungiert auf $C^\infty(H)$. Eigenfunktionen und „Wellenpakete“ $\psi \in \text{Ran}(E(b) - E(a))$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, wobei $E(t)$ die Spektralschar von H bezeichnet, sind spezielle C^∞ -Vektoren (vgl. z.B. [RSII], Abschnitt X.6).

Die Annahme $\|\psi_0\| = 1$ wird erst in Abschnitt 2.2.2 motiviert. Sie stellt aber keine Einschränkung der Allgemeinheit dar, weil mit ψ auch $c\psi$, $c \in \mathbb{C}$, Lösung der Schrödingergleichung ist und dasselbe Geschwindigkeitsfeld $v^{c\psi} = v^\psi$ gemäß (1.1) erzeugt.

Satz 2.2 *Es gelte A1–A3. Dann gibt es zu $\psi_t = e^{-itH/\hbar}\psi_0$ eine Funktion $f \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$, so daß für alle $t \in \mathbb{R}$ $f(q, t) = \psi_t(q)$ für fast alle $q \in \Omega$ ist.*

Diese Aussage ist wohl in der ein oder anderen Form bekannt. Wir geben hier einen Beweis, weil wir kein Zitat gefunden haben, das in unseren Rahmen paßt.³

Beweis $\psi_0 \in C^\infty(H) \implies \psi_t \in C^\infty(H)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Deshalb sind die Funktionen $\chi_{n,t} := H^n \psi_t (= e^{-itH/\hbar} \chi_{n,0})$ in $L^2(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$.

1. *Schritt:* ψ_t und $\chi_{n,t}$ sind meßbar in q (weil $\psi_t, \chi_{n,t} \in L^2(\Omega)$ sind), und die Abbildungen $t \mapsto \psi_t$ bzw. $t \mapsto \chi_{n,t}$ sind schwach meßbar, d.h. die Abbildungen $t \mapsto (f, \phi_t)$ sind meßbar für alle $f \in L^2(\Omega)$ und $\phi = \psi, \chi_n$ (sie sind sogar stark differenzierbar). Dann gibt es einen gemeinsam in (q, t) meßbaren „Vertreter“ von $\phi_t(q)$:

Lemma 2.3 *Die Abbildung $t \mapsto \phi_t \in L^2(\Omega)$ sei schwach meßbar. Dann gibt*

³ Hunziker [Hun] zeigt die Regularität der Wellenfunktion für ψ_0 aus dem Schwartzschen Raum und Potentiale, die beschränkte C^∞ -Funktionen auf \mathbb{R}^d mit beschränkten Ableitungen sind. Regularität von Eigenfunktionen (für genügend glatte Potentiale) ist wohlbekannt (siehe z.B. [RSII], Thm. IX.26).

es eine Funktion $\tilde{\phi}$, die in (q, t) gemeinsam meßbar ist, und für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $\tilde{\phi}(q, t) = \phi_t(q)$ für fast alle $q \in \Omega$.

Beweis (vgl. [BovN], S. 263f.) Wir setzen für alle $t \in \mathbb{R}$ ϕ_t auf Ω^c durch 0 fort. $B(q, \frac{1}{k})$ bezeichne die d -dimensionale Kugel um $q \in \Omega$ mit dem Radius $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. $f_{q,k} := \frac{1}{\text{Vol}(B(q, \frac{1}{k}))} \mathbb{1}_{B(q, \frac{1}{k})}$ bezeichne die normierte charakteristische Funktion der Kugel $B(q, \frac{1}{k})$. Wir bilden mit einer Orthonormalbasis $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $L^2(\mathbb{R}^d)$ die (q, t) -meßbaren Funktionen $\Phi_k : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\Phi_k(q, t) := \sum_{n=1}^{\infty} (f_{q,k}, g_n)(g_n, \phi_t) = (f_{q,k}, \phi_t) = \frac{1}{\text{Vol}(B(q, \frac{1}{k}))} \int_{B(q, \frac{1}{k})} \phi_t(y) dy.$$

Dann ist die Funktion

$$\tilde{\phi}(q, t) := \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(q, t)$$

(q, t) -meßbar, und aus dem Satz über die Ableitung einer integrierbaren Funktion folgt, daß für jedes $t \in \mathbb{R}$ $\tilde{\phi}(q, t) = \phi_t(q)$ für fast alle $q \in \Omega$ ist. \square

Folglich sind $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\chi}_n$ wegen der Unitarität der Zeitentwicklung lokal L^2 in $\Omega \times \mathbb{R}$ und damit auch lokal im Sobolevraum $W^0 = L^2(\mathbb{R}^{d+1})$. Wir beziehen uns auf die Definitionen und Theoreme in [Rud], wobei wir allerdings den Sobolevraum n -ter Ordnung mit W^n statt mit H^n bezeichnen,⁴ weil H bei uns der Hamiltonoperator ist.

2. Schritt: Wir betrachten den elliptischen Operator L auf dem Raum der Distributionen über $\Omega \times \mathbb{R}$, $D'(\Omega \times \mathbb{R})$,

$$L := -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} \Delta_k + V = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + H$$

und zeigen, daß

$$L\tilde{\psi} = \tilde{\chi}_2 + \tilde{\chi}_1 \quad \text{und} \quad L\tilde{\chi}_n = \tilde{\chi}_{n+2} + \tilde{\chi}_{n+1} \quad (2.5)$$

im Distributionssinn auf $\Omega \times \mathbb{R}$ gilt. Zunächst zeigen wir, daß $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\chi}_n$ die Schrödingergleichung im Distributionssinn erfüllen, d.h. daß für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$

$$-i\hbar \int_{\Omega \times \mathbb{R}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \tilde{\psi} dq dt = \int_{\Omega \times \mathbb{R}} (H\varphi) \tilde{\psi} dq dt$$

⁴ $W^n = \{f : \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (1 + |y|^2)^n |\hat{f}(y)|^2 dy < \infty\}$, wobei \hat{f} die Fouriertransformierte von f bezeichnet.

und analoges für $\tilde{\chi}_n$ gilt. Hierfür betrachten wir die Funktion $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \int_{\Omega} \varphi(q, t) \tilde{\psi}(q, t) dq = (\varphi_t^*, \tilde{\psi}_t)$. G hat kompakten Träger und ist stetig differenzierbar mit

$$G'(t) = \frac{1}{i\hbar}(\varphi_t^*, H\tilde{\psi}_t) + \left(\frac{\partial \varphi_t^*}{\partial t}, \tilde{\psi}_t \right),$$

weil das Skalarprodukt (\cdot, \cdot) in beiden Variablen stetig ist und $t \mapsto \tilde{\psi}_t$ schwach (in $L^2(\Omega)$) differenzierbar ist. Es gilt $\varphi_t^* \in C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{D}(H)$ für alle t , deshalb ist $(\varphi_t^*, H\tilde{\psi}_t) = (H\varphi_t^*, \tilde{\psi}_t)$. Aus $\int_{\mathbb{R}} G'(t) dt = 0$ folgt, daß $\tilde{\psi}$ und analog $\tilde{\chi}_n$ tatsächlich Lösungen der Schrödingergleichung im Distributionssinn sind, d.h. wir erhalten

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = H\tilde{\psi} = \tilde{\chi}_1 \quad \text{und} \quad i\hbar \frac{\partial \tilde{\chi}_n}{\partial t} = H\tilde{\chi}_n = \tilde{\chi}_{n+1}$$

im Distributionssinn. Nun berechnet man

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \varphi(L\tilde{\psi}) dq dt &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \left((-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + H) \varphi \right) \tilde{\psi} dq dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \left((-i\hbar \frac{\partial}{\partial t}) (-i\hbar \frac{\partial}{\partial t}) \varphi \right) \tilde{\psi} dq dt + \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} (H\varphi) \tilde{\psi} dq dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} (-i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t}) H\tilde{\psi} dq dt + \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \varphi (H\tilde{\psi}) dq dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \varphi \tilde{\chi}_2 dq dt + \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \varphi \tilde{\chi}_1 dq dt. \end{aligned}$$

Folglich gilt (2.5) im Distributionssinn auf $\Omega \times \mathbb{R}$.

3. Schritt: Durch wiederholte Anwendung von Theorem 8.12 in [Rud] folgt, daß $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\chi}_n$ lokal W^n sind für alle geraden positiven n . Theorem 8.11 in [Rud] impliziert, daß alle Distributionsableitungen $D_\alpha \tilde{\psi}$ lokal L^2 in $\Omega \times \mathbb{R}$ sind, und schließlich folgt aus Sobolevs Lemma (Theorem 7.25 in [Rud]), daß $\tilde{\psi}$ tatsächlich fast überall gleich einer C^∞ -Funktion f auf $\Omega \times \mathbb{R}$ ist. Die Raum-Zeit-Nullmenge, auf der $\tilde{\psi}$ korrigiert werden muß, spaltet dabei auf in t -Schnitte, die tatsächlich für alle (und nicht nur für fast alle) $t \in \mathbb{R}$ Nullmengen in Ω sind. Dies folgt aus der L^2 -Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto \psi_t$. \square

Bemerkung 2.4 Die Funktion f aus Satz 2.2 ist eine Lösung der Schrödingergleichung im „klassischen“ Sinn. Im folgenden werden wir $f(q, t)$ wieder mit $\psi(q, t)$ oder auch mit $\psi_t(q)$ bezeichnen.

Die Bedingungen A1–A3 werden für dieses gesamte Kapitel vorausgesetzt.

2.2 Die maximale Lösung der Bohmschen Gleichung

2.2.1 Existenz, Eindeutigkeit und Regularität

Wir untersuchen nun die Gleichung (1.2)

$$\frac{dQ_t}{dt} = v^{\psi_t}(Q_t)$$

mit (1.1)

$$v^{\psi_t} = (\mathbf{v}_1^{\psi_t}, \dots, \mathbf{v}_N^{\psi_t}), \quad \mathbf{v}_k^{\psi_t}(q) = \frac{\hbar}{m_k} \operatorname{Im} \frac{\nabla_k \psi_t(q)}{\psi_t(q)}$$

für die Bohmschen Bahnen der Teilchen. Unter den Voraussetzungen A1–A3 ist die Wellenfunktion $\psi \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$. Damit ist das Geschwindigkeitsfeld v^ψ unendlich oft differenzierbar auf dem Komplement der Menge von Nullstellen der Wellenfunktion ψ , $\mathcal{N} := \{(q, t) \in \Omega \times \mathbb{R} : \psi(q, t) = 0\}$, also auf der Menge von „guten“ Punkten

$$\mathcal{G} := (\Omega \times \mathbb{R}) \setminus \mathcal{N}.$$

\mathcal{G} ist eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^{d+1} . Wir bezeichnen mit \mathcal{G}_t den Schnitt von \mathcal{G} zu einer Zeit t : $\mathcal{G}_t = \Omega \setminus \mathcal{N}_t$, wobei $\mathcal{N}_t = \{q \in \Omega : \psi(q, t) = 0\}$.

Aus dem grundlegenden Satz über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems $\dot{q} = v(q, t) = v^{\psi_t}(q)$ mit $q(s) = a$, wobei $v \in C^\infty(\mathcal{G}, \mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathcal{G}_s$ gilt, folgt (siehe z.B. [KnKap], Satz III.2.1)

Für alle Anfangswerte $(a, s) \in \mathcal{G}$ gibt es eindeutig bestimmte Zeiten $\tau^-(a, s)$ und $\tau(a, s)$ mit $-\infty \leq \tau^-(a, s) < s < \tau(a, s) \leq \infty$ und eine eindeutige maximale (nichtfortsetzbare) Lösung Q auf dem Zeitintervall $E(a, s) := (\tau^-(a, s), \tau(a, s))$.

Es gilt

$$Q(t; a, s) = Q(t; Q(t'; a, s), t'). \quad (2.6)$$

Aus dem Satz über die stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten (siehe z.B. [KnKap], Satz III.3.1) folgt

Der Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^{d+2}$ der maximalen Lösung $Q(t; a, s)$

$$D := \{(t, a, s) : (a, s) \in \mathcal{G}, t \in E(a, s)\} \quad (2.7)$$

ist eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^{d+2} , und Q ist auf D lokal Lipschitzstetig bezüglich (t, a, s) .

Aus der Differenzierbarkeit des Geschwindigkeitsfeldes $v = v^\psi$ folgen Differenzierbarkeitseigenschaften der maximalen Lösung (siehe z.B. [KnKap], Satz III.3.2):

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial Q}{\partial t}, \quad \frac{\partial Q}{\partial a_i}, \quad \frac{\partial Q}{\partial s}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial a_i}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial s}$$

für $i = 1, \dots, d$ der maximalen Lösung $Q(t; a, s)$ existieren auf D und sind dort stetig. Ferner sind — bei festem a, s — $y_i(t) = \frac{\partial}{\partial a_i} Q(t; a, s)$ bzw. $y(t) = \frac{\partial}{\partial s} Q(t; a, s)$ als Funktion von t Lösung des linearen Anfangswertproblems

$$\dot{y}_i = \frac{\partial v}{\partial q}(Q(t; a, s), t) y_i, \quad y_i(s) = e_i \quad (2.8)$$

bzw.

$$\dot{y} = \frac{\partial v}{\partial q}(Q(t; a, s), t) y, \quad y(s) = -\left. \frac{\partial Q(t; a, s)}{\partial t} \right|_{t=s} = -v(a, s).$$

Dabei bezeichnet $\frac{\partial v}{\partial q}$ die Jacobimatrix $\left(\frac{\partial v_i}{\partial q_j} \right)_{ij}$ und e_i den i -ten Vektor der kanonischen Basis des \mathbb{R}^d .

Wir setzen ohne Einschränkung der Allgemeinheit $s = 0$ und bezeichnen die maximale Lösung Q , ihr Existenzintervall E sowie dessen obere Grenze τ als Funktion von $q_0 \in \mathcal{G}_0$ bei festem $s = 0$ auch mit $Q(t; q_0) = Q_t(q_0) := Q(t; q_0, 0)$, $E(q_0) := E(q_0, 0)$ und $\tau(q_0) := \tau(q_0, 0)$.

Wir bezeichnen mit D^0 den Definitionsbereich von Q

$$D^0 := \{(t, q_0) : q_0 \in \mathcal{G}_0, t \in E(q_0)\}$$

mit D_t^0 den Definitionsbereich von Q_t , das ist der t -Schnitt von D^0

$$D_t^0 := \{q_0 \in \mathcal{G}_0 : t \in E(q_0)\}.$$

D^0 ist eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^{d+1} , denn D^0 ist der $(s = 0)$ -Schnitt der offenen Menge D . Folglich sind auch die Mengen D_t^0 offene Teilmengen von \mathcal{G}_0 .

Hieraus folgen gewisse Regularitätseigenschaften der Grenzen τ und τ^- des Existenzintervalls $E(q_0)$ der maximalen Lösung als Funktion von q_0 : τ ist eine unterhalbstetige Funktion von q_0 , τ^- ist oberhalbstetig. Insbesondere sind τ und τ^- meßbar.

Weiter bezeichnen wir mit \mathcal{I} den Bildbereich von Q

$$\mathcal{I} := \{(q, s) \in \mathcal{G} : \exists q_0 \in \mathcal{G}_0 \text{ mit } s \in E(q_0) \text{ und } q = Q_s(q_0)\}$$

und mit \mathcal{I}_t den Bildbereich von Q_t

$$\mathcal{I}_t := \{q \in \mathcal{G}_t : \exists q_0 \in \mathcal{G}_0 \text{ mit } t \in E(q_0) \text{ und } q = Q_t(q_0)\}.$$

\mathcal{I} ist eine offene Teilmenge von \mathcal{G} , denn \mathcal{I} ist der $(t = 0)$ -Schnitt von D . Folglich sind auch die t -Schnitte \mathcal{I}_t offene Teilmengen von \mathcal{G}_t .

Korollar 2.5 *Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung*

$$Q_t : D_t^0 \longrightarrow \mathcal{I}_t, \quad q_0 \longmapsto Q_t(q_0)$$

ein Diffeomorphismus. Für die Funktionaldeterminante $\det \frac{\partial Q_t}{\partial q_0}(q_0)$ gilt für $q_0 \in D_t^0$

$$\det \frac{\partial Q_t}{\partial q_0}(q_0) = \exp \left(\int_0^t \operatorname{div} v(Q(s; q_0), s) ds \right). \quad (2.9)$$

Beweis Die Eigenschaft, daß Q_t ein Diffeomorphismus ist, folgt aus den oben zitierten Sätzen und Definitionen.

Für die Aussage über die Funktionaldeterminante beachte man Gleichung (2.8): Für $q_0 \in \mathcal{G}_0$, $t \in E(q_0)$ und $i = 1, \dots, d$ lösen die Funktionen $y_i(t; q_0) = \frac{\partial}{\partial q_{0i}} Q(t; q_0)$ das lineare Anfangswertproblem

$$\frac{dy_i}{dt} = A(t; q_0) y_i, \quad y_i(0) = e_i \quad (2.10)$$

mit $A(t; q_0) := \frac{\partial v}{\partial q}(Q(t; q_0), t)$. q_0 ist hierbei als Parameter aufzufassen. $A(t; q_0)$ ist stetig für $t \in E(q_0)$, also existiert nach dem grundlegenden Satz über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen linearer Differentialgleichungen die Lösung y_i auf $E(q_0)$. $Y(t; q_0) = (y_1(t; q_0), \dots, y_d(t; q_0)) = \frac{\partial Q_t}{\partial q_0}(q_0)$ bildet ein Fundamentalsystem von (2.10), also erfüllt die Determinante die Gleichung

$$\det Y(t) = \det Y(0) \exp \left(\int_0^t \operatorname{sp} A(s; q_0) ds \right)$$

(siehe z.B. [KnKap], Satz II.2.3), und mit $\det Y(0) = 1$ und $\operatorname{sp} A(s; q_0) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial q_i}(Q(s; q_0), s) = \operatorname{div} v(Q(s; q_0), s)$ folgt Gleichung (2.9). \square

2.2.2 Die Kontinuitätsgleichung und die Äquivarianz von $|\psi|^2$

Wir haben bereits in der Einleitung an einem einfachen Beispiel gezeigt, daß man nicht erwarten kann, daß für *alle* $q_0 \in \mathcal{G}_0$ $\tau(q_0) = \infty$ gilt. Wir werden deshalb zeigen, daß $\tau(q_0) = \infty$ ist für eine Menge vollen Maßes bezüglich eines von der Dynamik ausgezeichneten Maßes auf \mathcal{G}_0 , d.h. eines Maßes, das sich unter dem Transport durch die Teilchenbewegung in einfacher Weise entwickelt. Für die statistische Analyse der Newtonschen Mechanik ist das Lebesgue-Maß im Phasenraum ausgezeichnet, denn der Liouvillesche Satz garantiert, daß Volumina im Phasenraum unter der Newtonschen Dynamik erhalten bleiben, d.h. das Lebesgue-Maß ist invariant unter der Newtonschen Dynamik. Bei Bohmscher Mechanik ist das Geschwindigkeitsfeld im Konfigurationsraum im allgemeinen nicht divergenzfrei (abgesehen von Spezialfällen wie etwa $v = 0$, was beispielsweise bei reeller Wellenfunktion auftritt), also ist das Lebesgue-Maß nicht erhalten. Für Bohmsche Mechanik wurde der Begriff des „äquivarianten Maßes“ geprägt [DGZ92a]: eines Maßes, das unter der Zeitentwicklung seine Form als Funktional der Wellenfunktion ψ beibehält, $\rho_0 = F(\psi_0) \implies \rho_t = F(\psi_t)$. Diese Überlegung führt auf das Maß $\rho = |\psi|^2$.

Sei P ein Maß auf (der Borel- σ -Algebra von) \mathcal{G}_0 mit einer Dichte ρ_0 (bezüglich des Lebesgue-Maßes), die stetig differenzierbar sei. Korollar 2.5 garantiert, daß das Bildmaß von P unter der Abbildung Q_t , das Maß $P_t = P \circ Q_t^{-1}$ auf \mathcal{I}_t , eine Dichte ρ_t besitzt: für $y \in \mathcal{I}_t$ gilt gemäß Transformationssatz

$$\rho_t(y) = \frac{\rho_0(Q_t^{-1}(y))}{\det \frac{\partial Q_t}{\partial q_0}(Q_t^{-1}(y))}. \quad (2.11)$$

Lemma 2.6 $\rho \in C^1(\mathcal{I})$ und erfüllt für $(q, t) \in \mathcal{I}$ die Kontinuitätsgleichung (1.6)

$$\frac{\partial \rho_t(q)}{\partial t} + \operatorname{div} (v(q, t) \rho_t(q)) = 0.$$

Beweis Die Differenzierbarkeit folgt aus dem Satz über differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangswerten und Korollar 2.5. Gleichung (1.6) sieht man folgendermaßen [D94]: Man betrachte für $t \in \mathbb{R}$, $f \in C_0^\infty(\mathcal{I}_t)$ den Erwartungswert

$$E_t(f) = \int_{\mathcal{I}_t} f(q) \rho_t(q) dq = \int_{D_t^0} f \circ Q_t(q) \rho_0(q) dq.$$

K bezeichne den Träger von f . Wir betrachten zunächst $\int_{\mathcal{I}_t} f(q)\rho_t(q) dq$. Es gibt ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$ mit $t \in J$ so daß $K \times J \subset \mathcal{I}$ ist. Denn $K \times \{t\}$ ist ein Kompaktum in \mathcal{I} , \mathcal{I} ist offen, und folglich hat $K \times \{t\}$ einen positiven Abstand δ zum Rand von \mathcal{I} . Man wähle also zum Beispiel $J = [t - \delta/2, t + \delta/2]$. Weil der Integrand auf $K \times J$ stetig partiell nach t differenzierbar ist, gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{I}_t} f(q)\rho_t(q) dq = \int_{\mathcal{I}_t} f(q) \frac{\partial \rho_t(q)}{\partial t} dq.$$

Analog argumentiert man, daß $\int_{D_t^0} f \circ Q_t(q)\rho_0(q) dq$ nach t stetig differenzierbar ist mit

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t^0} f \circ Q_t(q)\rho_0(q) dq = \int_{D_t^0} \nabla f(Q_t(q)) \cdot v(Q_t(q), t) \rho_0(q) dq.$$

(Weil Q_t ein Diffeomorphismus ist, ist der Träger $Q_t^{-1}(K)$ von $f \circ Q_t$ kompakt in D_t^0 . Q_t ist auf der offenen Menge D^0 stetig partiell nach t differenzierbar.) Man transformiert das Integral zurück auf \mathcal{I}_t und integriert partiell

$$\begin{aligned} \int_{D_t^0} \nabla f(Q_t(q)) \cdot v(Q_t(q), t) \rho_0(q) dq &= \int_{D_t^0} (\nabla f \cdot v_t) \circ Q_t(q) \rho_0(q) dq \\ &= \int_{\mathcal{I}_t} (\nabla f \cdot v_t)(q) \rho_t(q) dq = - \int_{\mathcal{I}_t} f(q) \operatorname{div} (v(q, t) \rho_t(q)) dq. \end{aligned}$$

Hiermit wurde gezeigt, daß für alle $t \in \mathbb{R}$ und $f \in C_0^\infty(\mathcal{I}_t)$

$$\int_{\mathcal{I}_t} f(q) \frac{\partial \rho_t(q)}{\partial t} dq = - \int_{\mathcal{I}_t} f(q) \operatorname{div} (v(q, t) \rho_t(q)) dq,$$

folglich gilt (1.6) auf \mathcal{I} . □

$|\psi|^2$ erfüllt ebenfalls die Kontinuitätsgleichung (1.6): Unter den Voraussetzungen von Satz 2.2 ist $\psi \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ und erfüllt die Schrödingergleichung klassisch. Folglich gilt die quantenmechanische „Kontinuitätsgleichung“

$$\frac{\partial |\psi_t(q)|^2}{\partial t} + \operatorname{div} j^{\psi_t}(q) = 0 \quad \text{für } (q, t) \in \Omega \times \mathbb{R} \quad (2.12)$$

mit dem „Wahrscheinlichkeitsstrom“ $j^\psi = (\mathbf{j}_1^\psi, \dots, \mathbf{j}_N^\psi)$

$$\mathbf{j}_k^\psi = \frac{\hbar}{2im_k} (\psi^* \nabla_k \psi - \psi \nabla_k \psi^*) = \frac{\hbar}{m_k} \operatorname{Im}(\psi^* \nabla_k \psi). \quad (2.13)$$

Auf \mathcal{G} ist $\mathbf{j}_k^\psi = \mathbf{v}_k^\psi |\psi|^2$, demnach gilt

$$\frac{\partial |\psi_t(q)|^2}{\partial t} + \operatorname{div} (v(q, t) |\psi_t(q)|^2) = 0 \quad \text{für } (q, t) \in \mathcal{G}. \quad (2.14)$$

Korollar 2.7 *Das Maß mit der Dichte $|\psi|^2$ ist äquivariant:*

$$\rho_0(q) = |\psi_0(q)|^2 \implies \rho_t(q) = |\psi_t(q)|^2 \quad \text{für } (q, t) \in \mathcal{I} \quad (2.15)$$

Beweis Vergleiche (2.14) mit (1.6): $|\psi|^2$ und ρ erfüllen dieselbe quasilineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung auf $\mathcal{I} \subset \mathcal{G}$. Weil die Anfangsfunktionen übereinstimmen, $\rho_0(q) = |\psi_0(q)|^2$ für $q \in \mathcal{G}_0 = \mathcal{I}_0 \subset \mathbb{R}^d$, stimmen die Lösungen ρ und $|\psi|^2$ aufgrund der Eindeutigkeit von Lösungen quasilinearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung auf dem Bereich, auf dem die Charakteristiken existieren, das ist in unserem Fall $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^{d+1}$, überein (siehe z.B. [CHII], Kapitel 2, oder die Formulierung für unser Problem in Satz 4.1 im Anhang). Folglich gilt (2.15). \square

Hieraus ergibt sich, daß das Maß mit der Dichte $|\psi|^2$ durch die Bohmsche Dynamik ausgezeichnet wird. Das Maß mit der Dichte $\rho_0 = |\psi_0|^2$ entwickelt sich unter der Bohmschen Teilchenbewegung zu dem Maß mit der Dichte $\rho_t = |\psi_t|^2$, und die quantenmechanische „Kontinuitätsgleichung“ (2.12) ist tatsächlich eine Kontinuitätsgleichung im klassischen Sinne.

Wir bezeichnen das Maß mit der Dichte $|\psi_0|^2$ auf \mathcal{G}_0 mit \mathbf{P} . Wegen der Annahme A3 ist $\psi_0 \in L^2(\Omega)$ mit $\|\psi_0\| = \int_{\mathcal{G}_0} |\psi_0(q)|^2 dq = 1$, so daß \mathbf{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{G}_0 darstellt. Wir erinnern daran, daß wir sagen, eine Eigenschaft gilt *typischerweise* oder *für typische Anfangswerte* q_0 , wenn sie für \mathbf{P} -fast alle $q_0 \in \mathcal{G}_0$ gilt.

Wir zeigen im folgenden, daß für typische q_0 $\tau(q_0) = \infty$ ist, d.h. wir zeigen, daß die Lösung zu (1.2) \mathbf{P} -fast sicher global existiert

$$\mathbf{P}(\tau < \infty) = 0,$$

oder, äquivalent dazu,

$$\forall T > 0 : \mathbf{P}(\tau < T) = 0. \quad (2.16)$$

Bemerkung 2.8 Die zeitungekehrte Bahn $\tilde{Q}(t) = Q(-t)$ erfüllt eine Bohmsche Gleichung $\frac{d\tilde{Q}}{dt} = v^{\tilde{\psi}}(q, t)$ mit $\tilde{\psi}(q, t) = \psi(q, -t)^* = CU_{-t}C\tilde{\psi}(q, 0)$, wobei C die komplexe Konjugation bezeichnet. $\tilde{\psi}$ erfüllt eine Schrödingergleichung mit dem Hamiltonoperator $\tilde{H} = CHC$. Wenn H reell ist, gilt $\tilde{H} = H$. Wir zeigen in Lemma 2.23 und Bemerkung 3.3, daß die in Korollar 2.22 und Satz 3.1 betrachteten Hamiltonoperatoren reell sind. Dann folgt aus $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 0$, daß auch $\mathbf{P}(\tau^- > -\infty) = 0$. Es genügt also, die positive Zeitrichtung zu betrachten.

Bemerkung 2.9 Aus dem Beweis der globalen Existenz der Dynamik folgt $\rho = |\psi|^2$ auf dem Konfigurationsraum Ω . Dies ist wesentlich für die Ableitung des quantenmechanischen Meßformalismus aus Bohrscher Mechanik [DaDGZ]. ρ_t ist zwar eigentlich nur auf \mathcal{I}_t , dem Bildbereich von \mathcal{G}_0 unter der Bohrschen Dynamik, definiert, während $|\psi_t|^2$ auf ganz Ω erklärt ist. Aber die Mengen \mathcal{I}_t haben volles $|\psi_t|^2$ -Maß \mathbf{P}_t , denn $\mathbf{P}_t(\mathcal{I}_t) = \mathbf{P}(D_t^0) = \mathbf{P}(\{q_0 \in \mathcal{G}_0 : t \in E(q_0)\}) = 1$. Indem wir also $\rho_t = 0$ auf $\Omega \setminus \mathcal{I}_t$ setzen, erhalten wir $\rho_t = |\psi_t|^2$ fast überall im Konfigurationsraum Ω .

2.3 Eine hinreichende Bedingung für fast sichere globale Existenz der Teilchenbahnen

2.3.1 Die Grenzpunktmenge

Das grundlegende Kriterium für globale Existenz ergibt sich aus den Eigenschaften der Grenzpunktmenge der maximalen Lösung. Die τ -Grenzpunktmenge $L(Q(\cdot; q_0))$ der Trajektorie Q zum Anfangswert q_0 ist die Menge

$$L(Q(\cdot; q_0)) := \{q^* \in \mathbb{R}^d : \exists \text{ Folge } (t_k)_{k \in \mathbb{N}}, t_k \nearrow \tau(q_0) \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} Q(t_k; q_0) = q^*\}.$$

Lemma 2.10 Für alle $q_0 \in \mathcal{G}_0$ gilt

- a) Entweder $L(Q(\cdot; q_0)) \neq \emptyset$ oder $\lim_{t \nearrow \tau(q_0)} |Q(t; q_0)| = \infty$.
- b) Wenn $\tau(q_0) < \infty$ ist, dann gilt für alle $q^* \in L(Q(\cdot; q_0))$, daß $(q^*, \tau) \in \partial \mathcal{G}$ ist.

(Diese Aussagen sind beispielsweise in [KnKap] als Satz III.1.1a und Satz III.2.2 zu finden.) Man beachte, daß die maximale Lösung Q nicht notwendig stetig ist bei $t = \tau$, d.h. L kann mehr als einen Punkt enthalten, und es kann zusätzlich Folgen $t_k \rightarrow \tau$ geben, entlang welchen $|Q_{t_k}| \rightarrow \infty$ strebt.

Hieraus ergibt sich das Programm für den Beweis der globalen Existenz: Wir werden untersuchen, ob die Teilchenbahnen in endlicher Zeit den Rand von \mathcal{G} erreichen oder unbeschränkt werden. Hierfür wählen wir eine aufsteigende Folge von offenen Mengen $(\mathcal{G}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{G} , $\mathcal{G}^n \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{G}^{n_1} \subset \mathcal{G}^{n_2}$ für alle $n_1 < n_2$, $\overline{\mathcal{G}^n} \subset \mathcal{G}$ für alle n , die räumlich beschränkt seien: für alle n und T sei

$$\mathcal{G}_{[0, T]}^n := \mathcal{G}^n \cap (\mathbb{R}^d \times [0, T])$$

beschränkt. Für $q_0 \in \mathcal{G}_0^n$ bezeichne $\tau^n(q_0)$ die obere Grenze des maximalen Existenzintervalls der Lösung Q^n des Anfangswertproblems (1.2) auf \mathcal{G}^n . Die Folgen

$\tau^n(q_0)$ sind aufsteigend in n . Es gilt das folgende Korollar (vergleiche Korollar III.1 in [KnKap]):

Korollar 2.11 \mathcal{G}^n sei offen mit $\overline{\mathcal{G}^n} \subset \mathcal{G}$ und $\mathcal{G}_{[0,T]}^n$ beschränkt für alle $T < \infty$. Dann gilt:

- a) Für alle $q_0 \in \mathcal{G}_0^n$ mit $\tau(q_0) < \infty$ ist $\tau^n(q_0) < \tau(q_0)$ und $(Q(\tau^n(q_0); q_0), \tau^n(q_0)) \in \partial\mathcal{G}^n$.
- b) Für alle $T \leq \infty$ gilt

$$\{q_0 \in \mathcal{G}_0 : \tau(q_0) < T\} \subset (\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{G}_0^n) \cup \{q_0 \in \mathcal{G}_0^n : \tau^n(q_0) < T\}$$

und damit

$$\mathbf{P}(\{q_0 \in \mathcal{G}_0 : \tau(q_0) < T\}) \leq \mathbf{P}(\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{G}_0^n) + \mathbf{P}(\{q_0 \in \mathcal{G}_0^n : \tau^n(q_0) < T\}). \quad (2.17)$$

Wenn die Folge $(\mathcal{G}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ aufsteigend ist, ist die rechte Seite von (2.17) monoton fallend in n .

Beweis

- a) Aus $\mathcal{G}^n \subset \mathcal{G}$ folgt zunächst $\tau^n(q_0) \leq \tau(q_0)$ für alle $q_0 \in \mathcal{G}_0^n$. Aus $\tau(q_0) < \infty$ folgt also $\tau^n(q_0) < \infty$. Weil $\mathcal{G}_{[0, \tau^n(q_0)]}^n$ beschränkt ist, muß es nach Lemma 2.10 a) mindestens einen Punkt $q^* \in L(Q^n(\cdot; q_0))$ geben. Wäre $\tau^n(q_0) = \tau(q_0)$, so wäre $(q^*, \tau(q_0)) \in (\partial\mathcal{G}^n \cap \partial\mathcal{G})$ nach Lemma 2.10 b), $\partial\mathcal{G}^n \cap \partial\mathcal{G}$ wäre also nichtleer im Widerspruch zu $\overline{\mathcal{G}^n} \subset \mathcal{G}$. Also gilt $\tau^n(q_0) < \tau(q_0)$. Die Aussage $(Q_{\tau^n(q_0)}(q_0), \tau^n(q_0)) \in \partial\mathcal{G}^n$ folgt aus der Stetigkeit von Q im Punkt $\tau^n(q_0) < \tau(q_0)$.
- b) folgt unmittelbar aus a). □

Um also fast sichere globale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Bohmschen Mechanik zu zeigen, genügt es, für eine geeignete Folge von Mengen \mathcal{G}^n zu zeigen, daß die rechte Seite von (2.17) für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt. Wir werden \mathcal{G}^n aus 3 verschiedenen Teilen aufbauen, den 3 verschiedenen problematischen Gebieten entsprechend. (\mathcal{K}^r) sei eine aufsteigende Folge von offenen Kugeln im \mathbb{R}^d , (\mathcal{S}^δ) sei eine absteigende Folge von abgeschlossenen Umgebungen von $\mathcal{S} := \partial\Omega$ in \mathbb{R}^d , und (\mathcal{N}^ϵ) sei eine absteigende Folge abgeschlossener Umgebungen von \mathcal{N} in \mathbb{R}^{d+1} . $\mathcal{G}^{\epsilon\delta r}$ bezeichnet die Menge der “ ϵ - δ - r -guten” Punkte in der Konfigurationsraum-Zeit, vgl. Abbildung 2.1,

$$\mathcal{G}^{\epsilon\delta r} := (((\mathcal{K}^r \cap \Omega) \setminus \mathcal{S}^\delta) \times \mathbb{R}) \setminus \mathcal{N}^\epsilon,$$

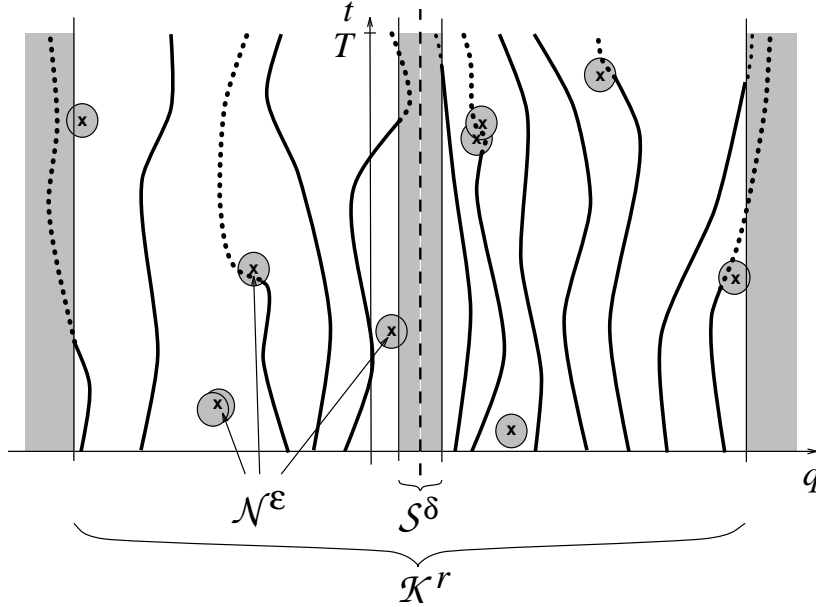


Abbildung 2.1 Die Bohmschen Bahnen verlaufen in dem weißen Bereich $\mathcal{G}^{\varepsilon\delta r} := (((\mathcal{K}^r \cap \Omega) \setminus \mathcal{S}^\delta) \times \mathbb{R}) \setminus \mathcal{N}^\varepsilon$. Die Menge $\mathcal{S} \times \mathbb{R}$ ist gestrichelt, Knoten der Wellenfunktion sind durch \times gekennzeichnet. Fortgesetzte Bahnen sind punktiert.

und $\mathcal{G}_t^{\varepsilon\delta r}$ bezeichnet den Schnitt zu einer Zeit $t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{G}_t^{\varepsilon\delta r} := (\mathcal{K}^r \cap \Omega) \setminus (\mathcal{S}^\delta \cup \mathcal{N}_t^\varepsilon).$$

Außerdem setzen wir

$$\mathcal{G}_{[0,T]}^{\delta r} := ((\overline{\mathcal{K}^r} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{S}^\delta}) \cap \Omega) \times [0, T]. \quad (2.18)$$

Mit Korollar 2.11 und der (offensichtlich meßbaren) Abbildung

$$\begin{aligned} X^{\varepsilon\delta r T} : \mathcal{G}_0^{\varepsilon\delta r} &\longrightarrow \partial\mathcal{G}^{\varepsilon\delta r} \cup \mathcal{G}_T, \\ q_0 &\longmapsto X^{\varepsilon\delta r T}(q_0) := (Q(\min(\tau^{\varepsilon\delta r}(q_0), T); q_0), \min(\tau^{\varepsilon\delta r}(q_0), T)) \end{aligned}$$

gilt für alle $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $r < \infty$ und $T < \infty$

$$\begin{aligned} \{q_0 \in \mathcal{G}_0^{\varepsilon\delta r} : \tau^{\varepsilon\delta r} < T\} &\subset \{q_0 \in \mathcal{G}_0^{\varepsilon\delta r} : X^{\varepsilon\delta r T} \in \partial\mathcal{G}^{\varepsilon\delta r} \cap (\mathbb{R}^d \times [0, T])\} \\ &= \{q_0 \in \mathcal{G}_0^{\varepsilon\delta r} : X^{\varepsilon\delta r T} \in \partial\mathcal{N}^\varepsilon \cap \mathcal{G}_{[0,T]}^{\delta r}\} \cup \\ &\quad \{q_0 \in \mathcal{G}_0^{\varepsilon\delta r} : X^{\varepsilon\delta r T} \in (\partial\mathcal{S}^\delta \times [0, T]) \cap \mathcal{G}\} \cup \\ &\quad \{q_0 \in \mathcal{G}_0^{\varepsilon\delta r} : X^{\varepsilon\delta r T} \in (\partial\mathcal{K}^r \times [0, T]) \cap \mathcal{G}\}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{q_0 \in \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r} : \tau^{\epsilon\delta r} < T\}) &\leq \mathbf{P}(\{q_0 \in \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r} : X^{\epsilon\delta r T} \in \partial\mathcal{N}^\epsilon \cap \mathcal{G}_{[0,T]}^{\delta r}\}) \\ &\quad + \mathbf{P}(\{q_0 \in \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r} : X^{\epsilon\delta r T} \in (\partial\mathcal{S}^\delta \times [0, T]) \cap \mathcal{G}\}) \\ &\quad + \mathbf{P}(\{q_0 \in \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r} : X^{\epsilon\delta r T} \in (\partial\mathcal{K}^r \times [0, T]) \cap \mathcal{G}\}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Unter Beachtung von (2.17) folgt (fast sichere) globale Existenz, wenn für geeignete Mengen \mathcal{N}^ϵ , \mathcal{S}^δ und \mathcal{K}^r die rechte Seite von (2.19) und $\mathbf{P}(\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r})$ gegen Null gehen im Limes $\epsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ und $r \rightarrow \infty$ in beliebiger Reihenfolge.

2.3.2 Der Fluß durch Oberflächen

Wir leiten in diesem Abschnitt eine Abschätzung für die Terme auf der rechten Seite von (2.19) ab. Sei Σ zunächst eine beliebige relativ abgeschlossene Teilmenge von \mathcal{G} . Wir definieren für die Bahn $Q(t; q_0)$, die bei $q_0 \in \mathcal{G}_0$ startet, die Zeiten $T_n^\Sigma(q_0)$, zu denen Σ zum n -ten Mal erreicht wird, und die Zeiten $A_n^\Sigma(q_0)$, zu denen Σ nach der n -ten Berührung wieder verlassen wird:

$$T_1^\Sigma(q_0) := \inf \{t \in [0, \tau(q_0)) : (Q(t; q_0), t) \in \Sigma\}$$

und schrittweise für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A_n^\Sigma(q_0) &:= \inf \{t \in (T_n^\Sigma(q_0), \tau(q_0)) : (Q(t; q_0), t) \notin \Sigma\}, \\ T_{n+1}^\Sigma(q_0) &:= \inf \{t \in (A_n^\Sigma(q_0), \tau(q_0)) : (Q(t; q_0), t) \in \Sigma\}, \end{aligned}$$

wobei wir jeweils, wenn die Menge, von der das Infimum genommen werden soll, leer ist, die entsprechende Größe gleich $\tau(q_0)$ setzen. In Lemma 4.2 im Anhang zeigen wir, daß die Funktionen T_n^Σ und A_n^Σ meßbar sind. Aus der Stetigkeit von $s \mapsto (Q(s; q_0), s)$ für $s < \tau(q_0)$ und der relativen Abgeschlossenheit von Σ in \mathcal{G} folgt

$$\begin{aligned} &\left(Q(T_n^\Sigma(q_0); q_0), T_n^\Sigma(q_0)\right) \in \Sigma \quad \text{falls} \quad T_n^\Sigma(q_0) < \tau(q_0) \\ \text{und} \quad &\left(Q(A_n^\Sigma(q_0); q_0), A_n^\Sigma(q_0)\right) \in \Sigma \quad \text{falls} \quad A_n^\Sigma(q_0) < \tau(q_0). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Teilmengen von \mathcal{G}_0 , für die die dort startenden Bahnen Σ mindestens n -mal erreichen, mit C_n^Σ

$$C_n^\Sigma := \{q_0 \in \mathcal{G}_0 : T_n^\Sigma(q_0) < \tau(q_0)\}.$$

Wir betrachten die Abbildungen X_n^Σ , die die Punkte $q_0 \in C_n^\Sigma$ auf den n -ten Eintrittspunkt in Σ transportieren:

$$X_n^\Sigma : C_n^\Sigma \longrightarrow \Sigma, \quad q_0 \longmapsto X_n^\Sigma(q_0) = \left(Q(T_n^\Sigma(q_0); q_0), T_n^\Sigma(q_0) \right) \in \Sigma.$$

Aus der Eindeutigkeit von Q als Lösung der Differentialgleichung (1.2) folgt, daß diese Abbildungen injektiv sind, die Bildmengen der C_n^Σ unter X_n^Σ

$$B_n^\Sigma := X_n^\Sigma(C_n^\Sigma) = \text{Ran } X_n^\Sigma$$

disjunkt sind und in \mathcal{I} liegen. Aus diesen Definitionen folgt unmittelbar, daß für $\Sigma = \partial\mathcal{N}^\epsilon \cap \mathcal{G}_{[0,T]}^{\delta r}$, $\Sigma = (\partial\mathcal{S}^\delta \times [0, T]) \cap \mathcal{G}$ und $\Sigma = (\partial\mathcal{K}^r \times [0, T]) \cap \mathcal{G}$

$$\{q_0 \in \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r} : X^{\epsilon\delta r T} \in \Sigma\} \subset \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r} \cap C_1^\Sigma. \quad (2.20)$$

Wir werden im nächsten Abschnitt die Mengen \mathcal{N}^ϵ , \mathcal{S}^δ und \mathcal{K}^r so wählen, daß ihre Ränder und damit auch die oben angegebenen Σ stückweise glatte Hyperflächen sind im folgenden Sinn:

Definition 2.12 Σ heißt *stückweise glatte Hyperfläche*, wenn $\Sigma = \Sigma_{\text{reg}} \cup \Sigma_{\text{sing}}$ mit

- 1) Σ_{reg} setzt sich zusammen aus höchstens abzählbar vielen d -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten Σ_{reg}^ℓ : $\Sigma_{\text{reg}} = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \Sigma_{\text{reg}}^\ell$;
- 2) $\Sigma_{\text{sing}} = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \Sigma_{\text{sing}}^\ell$ soll die eventuellen Kanten und Ecken von Σ enthalten, von denen vorausgesetzt wird, daß jedes der höchstens abzählbar vielen $\Sigma_{\text{sing}}^\ell$ eine ν_ℓ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit $\nu_\ell < d$ ist.

Wir berechnen nun für eine beliebige stückweise glatte Hyperfläche Σ , die eine relativ abgeschlossene Teilmenge von \mathcal{G} ist, $\mathbf{P}(C_n^\Sigma)$, die Wahrscheinlichkeit, daß die Bahn Q mit $|\psi_0|^2$ -verteilterm Anfangswert $q_0 \in \mathcal{G}_0$ die Hyperfläche Σ mindestens n -mal erreicht. Auf Σ_{reg} existiert ein Einheitsnormalenfeld U . Wir bezeichnen mit $w := (v, 1)$ das Feld der Tangenten an die Bahnen Q in der Konfigurationsraum-Zeit und teilen Σ_{reg} weiter auf in $\Sigma_{\text{reg},0} \cup \Sigma_{\text{reg},\pm}$, wobei

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{reg},0} &:= \{x \in \Sigma_{\text{reg}} : w(x) \cdot U(x) = 0\} \quad \text{und} \\ \Sigma_{\text{reg},\pm} &:= \{x \in \Sigma_{\text{reg}} : w(x) \cdot U(x) \neq 0\}. \end{aligned}$$

(In $\Sigma_{\text{reg},0}$ liegt die Tangente an die Bahn in der Hyperfläche, in $\Sigma_{\text{reg},\pm}$ kreuzen die Bahnen die Hyperfläche.) Weil die Aufteilung $\Sigma = \Sigma_{\text{reg},\pm} \cup \Sigma_{\text{reg},0} \cup \Sigma_{\text{sing}}$ disjunkt ist, gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(C_n^\Sigma) &= \mathbf{P}\left((X_n^\Sigma)^{-1}(B_n^\Sigma \cap \Sigma_{\text{reg},\pm})\right) + \\ &\quad \mathbf{P}\left((X_n^\Sigma)^{-1}(B_n^\Sigma \cap \Sigma_{\text{reg},0})\right) + \mathbf{P}\left((X_n^\Sigma)^{-1}(B_n^\Sigma \cap \Sigma_{\text{sing}})\right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Zunächst berechnen wir $\mathbf{P}\left((X_n^\Sigma)^{-1}(B_n^\Sigma \cap \Sigma_{\text{reg},\pm})\right)$, danach zeigen wir, daß $\mathbf{P}\left((X_n^\Sigma)^{-1}(B_n^\Sigma \cap \Sigma_{\text{reg},0})\right) = \mathbf{P}\left((X_n^\Sigma)^{-1}(B_n^\Sigma \cap \Sigma_{\text{sing}})\right) = 0$ ist. Wir bezeichnen für $x = (q, t) \in \mathcal{I} \subset \mathcal{G}$ mit $\rho(x)$ die Dichte $\rho(x) = \rho_t(q) = |\psi_t(q)|^2 = |\psi(x)|^2$ (vgl. (2.15)).

Lemma 2.13 *Es gilt*

$$\mathbf{P}\left((X_n^\Sigma)^{-1}(B_n^\Sigma \cap \Sigma_{\text{reg},\pm})\right) = \int_{B_n^\Sigma \cap \Sigma_{\text{reg},\pm}} |w(x) \cdot U(x)| \rho(x) d\sigma.$$

Beweis Es gibt für jeden Teil Σ_{reg}^ℓ einen abzählbaren differenzierbaren Atlas $(K^{\ell i}, \varphi^{\ell i})_{i \in \mathbb{N}}$ mit offenen $K^{\ell i} \subset \mathbb{R}^d$ und regulären⁵ Karten

$$\begin{aligned} \varphi^{\ell i} : K^{\ell i} &\longrightarrow \mathbb{R}^{d+1}, \quad \varphi^{\ell i}(K^{\ell i}) \subset \Sigma_{\text{reg}}^\ell \\ k = (k_1, \dots, k_d) &\longmapsto \varphi^{\ell i}(k) = (\varphi_1^{\ell i}, \dots, \varphi_d^{\ell i}, \varphi_t^{\ell i})(k) = (q(k), t(k)). \end{aligned}$$

Wir zeigen, daß für alle ℓ, i gilt

$$\mathbf{P}\left((X_n^\Sigma)^{-1}(B_n^\Sigma \cap \Sigma_{\text{reg},\pm} \cap \varphi^{\ell i}(K^{\ell i}))\right) = \int_{B_n^\Sigma \cap \Sigma_{\text{reg},\pm} \cap \varphi^{\ell i}(K^{\ell i})} |w(x) \cdot U(x)| \rho(x) d\sigma;$$

die Behauptung folgt dann, indem man Σ_{reg} mit den Karten $\varphi^{\ell i}$ geeignet überdeckt. Wir halten also ℓ, i fest und verzichten im folgenden auf diese Indizes. Mit den Bezeichnungen $\tilde{K} := \varphi^{-1}(B_n^\Sigma \cap \Sigma_{\text{reg},\pm} \cap \varphi(K))$, $D_\Phi := \varphi^{-1}(B_n^\Sigma \cap \varphi(K))$ und $\Phi : D_\Phi \longrightarrow \mathcal{G}_0$, $\Phi := (X_n^\Sigma)^{-1} \circ \varphi$ lautet die Behauptung

$$\mathbf{P}(\Phi(\tilde{K})) = \int_{\varphi(\tilde{K})} |w(x) \cdot U(x)| \rho(x) d\sigma. \quad (2.22)$$

Für die rechte Seite gilt

$$\int_{\varphi(\tilde{K})} |w(x) \cdot U(x)| \rho(x) d\sigma = \int_{\tilde{K}} |w(\varphi(k)) \cdot U(\varphi(k))| \rho(\varphi(k)) \sqrt{g(k)} dk$$

⁵ d.h. stetig differenzierbar, injektiv und für alle Punkte $k \in K^{\ell i}$ ist $\text{Rang} \frac{\partial \varphi^{\ell i}(k)}{\partial k} = d$, vgl. auch zu den anderen Begriffen zur Integration auf Mannigfaltigkeiten [Kow], §§35 und 36.

mit $g(k) = \det \frac{\partial \varphi^T}{\partial k} \frac{\partial \varphi}{\partial k}$, und die linke Seite von (2.22) soll mithilfe des Transformationsatzes umgeformt werden

$$\mathbf{P}(\Phi(\tilde{K})) = \int_{\Phi(\tilde{K})} \rho_0(q) dq = \int_{\tilde{K}} \rho_0(\Phi(k)) \left| \det \frac{\partial \Phi(k)}{\partial k} \right| dk. \quad (2.23)$$

Zunächst berechnen wir $\det \frac{\partial \Phi(k)}{\partial k}$ im Punkt $\tilde{k} \in D_\Phi$. Es gilt

$$\Phi(k) = (X_n^\Sigma)^{-1}(\varphi(k)) = (X_n^\Sigma)^{-1}(q(k), t(k)) = Q(0; q(k), t(k)) = Q(0; \varphi(k)).$$

Gemäß (2.6) setzen wir $(X_n^\Sigma)^{-1}$ zusammen aus der Abbildung von Σ nach $\mathcal{G}_{t(\tilde{k})}$ und der Abbildung $Q_{t(\tilde{k})}^{-1}$:

$$Q(0; q(k), t(k)) = Q(0; Q(t(\tilde{k}); q(k), t(k)), t(\tilde{k})).$$

Φ ist differenzierbar mit

$$\frac{\partial \Phi(k)}{\partial k} = \frac{\partial Q(0; q, t(\tilde{k}))}{\partial q} \Bigg|_{q=Q(t(\tilde{k}), \varphi(k))} \frac{\partial Q(t(\tilde{k}); q, t)}{\partial(q, t)} \Bigg|_{(q, t)=\varphi(k)} \frac{\partial \varphi(k)}{\partial k}. \quad (2.24)$$

An der Stelle $k = \tilde{k}$ ist die $d \times (d+1)$ -Matrix $\frac{\partial Q(t(\tilde{k}); q, t)}{\partial(q, t)}$ mit Hilfe des Satzes über differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangswerten einfach berechenbar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(t(\tilde{k}); q(k), t(k))}{\partial(q, t)} \Bigg|_{k=\tilde{k}} &= \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial Q(t(\tilde{k}); q, t)}{\partial q} & \frac{\partial Q(t(\tilde{k}); q, t)}{\partial t} \end{array} \right)_{k=\tilde{k}} \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \text{Id}_d & -v(x) \end{array} \right) \end{aligned}$$

wobei $(\text{Id})_d$ die d -dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet und $x = \varphi(\tilde{k})$. Die $(d+1) \times d$ -Matrix $\frac{\partial \varphi(k)}{\partial k}$ enthält in den Spalten die Tangentenvektoren $s_d = \frac{\partial \varphi}{\partial k_d}$ an die Hyperfläche Σ_{reg} . Zur Berechnung der Determinante von $\frac{\partial \Phi}{\partial k}$ stellen wir das Produkt der rechten zwei Matrizen in (2.24) mithilfe des Normalenvektor $U(x)$

von Σ_{reg} , der auf allen Tangentenvektoren senkrecht steht und auf die Länge 1 normiert ist, folgendermaßen dar:

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial Q}{\partial(q,t)} \\ \hline U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_d \quad U_t \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial k} \\ \left| \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_d \\ U_t \end{array} \right. \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial Q}{\partial(q,t)} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial k} \\ \hline 0 \quad \dots \quad 0 \end{array} \left| \begin{array}{c} \cdot \\ \vdots \\ \cdot \end{array} \right. \right)$$

Man berechnet

$$\det \left(\begin{array}{c} \frac{\partial Q(t(\tilde{k}); q(k), t(k))}{\partial(q,t)} \Big|_{k=\tilde{k}} \\ \hline U(x) \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{c} \text{Id}_d \\ \hline U_1 \quad \dots \quad U_d \end{array} \left| \begin{array}{c} -v_1 \\ \vdots \\ -v_d \\ U_t \end{array} \right. \right) = w(x) \cdot U(x).$$

Insgesamt ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial \Phi(k)}{\partial k} &= \det \frac{\partial Q(0; q, t(k))}{\partial q} \Big|_{q=q(k)} \det \left(\frac{\partial Q(t(k); q, t)}{\partial(q,t)} \Big|_{(q,t)=\varphi(k)} \frac{\partial \varphi(k)}{\partial k} \right) \\ &= \left(\det \frac{\partial Q_{t(k)}}{\partial q} (Q(0; q(k), t(k))) \right)^{-1} (w(x) \cdot U(x)) \det \left(\frac{\partial \varphi(k)}{\partial k}, U(x) \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

mit $x = \varphi(k)$. Diese Größe ist ungleich Null für $k \in \tilde{K}$; die Anwendung des Transformationssatzes in (2.23) ist also gerechtfertigt. Mit der Gleichung für die Bilddichte (2.11) ergibt sich für den Integranden in (2.23)

$$\rho_0(\Phi(k)) \left| \det \frac{\partial \Phi(k)}{\partial k} \right| = \rho(x) |w(x) \cdot U(x)| \left| \det \left(\frac{\partial \varphi(k)}{\partial k}, U(x) \right) \right|,$$

und mit

$$g(k) = \det \frac{\partial \varphi^T}{\partial k} \frac{\partial \varphi}{\partial k} = \det \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial k} \\ U(x) \end{array} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k}, U(x) \right) = \left(\det \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k}, U(x) \right) \right)^2$$

folgt die Behauptung (2.22). □

Lemma 2.14 *Es gilt $\mathbf{P}\left((X_n^\Sigma)^{-1}(B_n^\Sigma \cap \Sigma_{\text{reg},0})\right) = 0$.*

Beweis Wir zeigen, daß für alle ℓ, i gilt

$$\mathbf{P}\left((X_n^\Sigma)^{-1}(B_n^\Sigma \cap \Sigma_{\text{reg},0} \cap \varphi^{\ell i}(K^{\ell i}))\right) = 0;$$

die Behauptung folgt dann, indem man Σ_{reg} mit den Karten $\varphi^{\ell i}$ geeignet überdeckt. Wir halten also ℓ, i fest und verzichten im folgenden auf diese Indizes. Mit den Bezeichnungen $\hat{K} := \varphi^{-1}(B_n^\Sigma \cap \Sigma_{\text{reg},0} \cap \varphi(K))$ und $\Phi : D_\Phi \rightarrow \mathcal{G}_0$ wie oben lautet die Behauptung

$$\mathbf{P}(\Phi(\hat{K})) = 0.$$

Auf \hat{K} gilt gemäß (2.25) $\det \frac{\partial \Phi}{\partial k} = 0$, also ist mit dem Sardischen Lemma (siehe z.B. [BarFl], S. 323) der Bildbereich $\Phi(\hat{K})$ eine Lebesgue-Nullmenge, insbesondere also auch eine \mathbf{P} -Nullmenge. \square

Lemma 2.15 *Es gilt $\mathbf{P}\left((X_n^\Sigma)^{-1}(B_n^\Sigma \cap \Sigma_{\text{sing}})\right) = 0$.*

Beweis Wir wählen für jeden Teil $\Sigma_{\text{sing}}^\ell$ von Σ_{sing} einen abzählbaren differenzierbaren Atlas $(L^{\ell i}, \varphi^{\ell i})_{i \in \mathbb{N}}$ mit regulären Karten $\varphi^{\ell i}$ und $L^{\ell i} \subset \mathbb{R}^{\nu_\ell}$, wobei $\nu_\ell < d$ die Dimension von $\Sigma_{\text{sing}}^\ell$ ist. Wir zeigen, daß für alle ℓ, i gilt

$$\mathbf{P}\left((X_n^\Sigma)^{-1}(B_n^\Sigma \cap \varphi^{\ell i}(L^{\ell i}))\right) = 0.$$

Wir verzichten im folgenden auf die Indizes ℓ, i . Mit den Bezeichnungen $\tilde{L} := \varphi^{-1}(B_n^\Sigma \cap \varphi(L))$ und $\Phi : \tilde{L} \rightarrow \mathcal{G}_0$, $\Phi := (X_n^\Sigma)^{-1} \circ \varphi$ lautet die Behauptung

$$\mathbf{P}(\Phi(\tilde{L})) = 0.$$

Φ ist eine stetig differenzierbare Abbildung von $\tilde{L} \subset \mathbb{R}^{\nu_\ell}$ mit $\nu_\ell < d$ nach $\mathcal{G}_0 \subset \mathbb{R}^d$. Folglich ist $\Phi(\tilde{L})$ eine Lebesgue-Nullmenge in \mathcal{G}_0 (siehe z.B. [For], §7), also auch eine \mathbf{P} -Nullmenge. \square

Wir bezeichnen mit $J(x) := \rho(x)w(x) = (\rho(x)v^\psi(x), \rho(x))$ den Fluß. Weil für $x \in \Sigma_{\text{reg},0}$ $J(x) \cdot U(x) = 0$ ist, ergibt sich aus (2.21) und den Lemmata 2.13, 2.14 und 2.15:

Korollar 2.16 *Es gilt $\mathbf{P}(C_n^\Sigma) = \int_{B_n^\Sigma} |J \cdot U| d\sigma$.*

Wir setzen auf $\mathcal{G} \setminus \mathcal{I}$ die Dichte ρ durch 0 fort, $\rho(x) = 0$ für $x \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{I}$. Mit dem Quantenfluß (vgl. (1.7)) $J^\psi = (j^\psi, |\psi|^2)$ gilt $|J(x) \cdot U(x)| \leq |J^\psi(x) \cdot U(x)|$ auf \mathcal{G} .

Aus (2.20) und Korollar 2.16 erhalten wir, indem wir jeweils das Integral statt nur über B_1^Σ über ganz Σ ausdehnen, die folgenden Schranken an die Terme in (2.19):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X^{\epsilon\delta r T} \in (\partial\mathcal{N}^\epsilon \cap \mathcal{G}_{[0,T]}^{\delta r})) &\leq \int_{\partial\mathcal{N}^\epsilon \cap \mathcal{G}_{[0,T]}^{\delta r}} |J^\psi \cdot U| d\sigma := \mathbf{N}(\epsilon, \delta, r), \\ \mathbf{P}(X^{\epsilon\delta r T} \in (\partial\mathcal{S}^\delta \times [0, T]) \cap \mathcal{G}) &\leq \int_{(\partial\mathcal{S}^\delta \times [0, T]) \cap \mathcal{G}} |J^\psi \cdot U| d\sigma := \mathbf{S}(\delta), \quad (2.26) \\ \mathbf{P}(X^{\epsilon\delta r T} \in (\partial\mathcal{K}^r \times [0, T]) \cap \mathcal{G}) &\leq \int_{(\partial\mathcal{K}^r \times [0, T]) \cap \mathcal{G}} |J^\psi \cdot U| d\sigma =: \mathbf{I}(r). \end{aligned}$$

Die Integrale sind jeweils als Summe der Integrale über die regulären d -dimensionalen Teil-Hyperflächen zu verstehen.

Anhang: Der Erwartungswert der Durchkreuzungen von Σ

Wir beweisen in diesem Anhang (der für den weiteren Beweisgang nicht nötig ist), daß das Integral über den absoluten Fluß

$$\int_{\Sigma'} |J \cdot U| d\sigma \quad \text{mit} \quad \Sigma' := \Sigma \cap (\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$$

die anschauliche Bedeutung des Erwartungswertes der Durchkreuzungen von Σ hat. Wir definieren für $q_0 \in \mathcal{G}_0$ die Anzahl Z^Σ der Eintritte der Bahn $Q(t; q_0)$ in Σ durch

$$Z^\Sigma(q_0) := \max \{n \in \mathbb{N} : T_n^\Sigma(q_0) < \tau(q_0)\},$$

wobei $Z^\Sigma(q_0) = 0$ bzw. $= \infty$ zu setzen ist, falls $\{n \in \mathbb{N} : T_n^\Sigma(q_0) < \tau(q_0)\} = \emptyset$ bzw. $= \mathbb{N}$ ist. \mathbf{E} bezeichne den Erwartungswert bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathbf{P} .

Lemma 2.17 *Es gilt $\mathbf{E}(Z^\Sigma) = \int_{\Sigma'} |J \cdot U| d\sigma$.*

Beweis Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\{q_0 \in \mathcal{G}_0 : Z^\Sigma(q_0) \geq n\} = C_n^\Sigma.$$

Mit Korollar 2.16 folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z^\Sigma) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(Z^\Sigma \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(C_n^\Sigma) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n^\Sigma} |J \cdot U| d\sigma = \int_{\Sigma'} |J \cdot U| d\sigma - R \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} R &= \int_{\Sigma' \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^{\Sigma}} |J \cdot U| d\sigma = \int_{(\Sigma' \cap \mathcal{I}) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^{\Sigma}} |J \cdot U| d\sigma \\ &= \sum_{\ell} \int_{((\Sigma_{\text{reg}}^{\ell})' \cap \mathcal{I}) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^{\Sigma}} |J \cdot U| d\sigma, \end{aligned}$$

denn auf $\mathcal{G} \setminus \mathcal{I}$ ist $\rho(x) = 0 \Rightarrow J(x) = 0$. Wir setzen

$$C_{\infty}^{\Sigma} := \{q_0 \in \mathcal{G}_0 : Z^{\Sigma}(q_0) = \infty\}.$$

1. *Fall:* $\mathbf{P}(C_{\infty}^{\Sigma}) > 0$. Dann gilt die Behauptung von Lemma 2.17 trivialerweise, denn es ist $\mathbf{E}(Z^{\Sigma}) = \infty$ und $\int_{\Sigma'} |J \cdot U| d\sigma \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(C_n^{\Sigma}) = \infty$ (weil $C_1^{\Sigma} \supset C_2^{\Sigma} \supset \dots \supset C_{\infty}^{\Sigma}$). Wenn sich die Hyperfläche Σ zeitlich bis ins Unendliche erstreckt, findet man leicht Szenarien, für die $\mathbf{P}(C_{\infty}^{\Sigma}) > 0$ ist: Für $d = 1$ betrachte man die Teilchenbewegung $Q(t; q_0) = q_0$ für alle t und $\Sigma = \{(q(t), t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) : q(t) = \sin t\}$. In Abbildung 2.2 sind Beispiele für Hyperflächen Σ dargestellt, für die bei derselben Teilchenbewegung $\mathbf{P}(C_{\infty}^{\Sigma}) > 0$ ist, ohne daß Σ sich zeitlich bis ins Unendliche erstreckt.

2. *Fall:* $\mathbf{P}(C_{\infty}^{\Sigma}) = 0$. Wir haben zu zeigen, daß $R = 0$ ist. Wie im Beweis von Lemma 2.13 wählen wir für jeden Teil $\Sigma_{\text{reg}}^{\ell}$ einen abzählbaren differenzierbaren Atlas $(K^{li}, \varphi^{li})_{i \in \mathbb{N}}$ mit offenen $K^{li} \subset \mathbb{R}^d$ und regulären Karten $\varphi^{li} : K^{li} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$, $\varphi^{li}(K^{li}) \subset \Sigma_{\text{reg}}^{\ell}$. Wir setzen

$$M^{\ell} := \left\{ x \in ((\Sigma_{\text{reg}}^{\ell})' \cap \mathcal{I}) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^{\Sigma} : |J(x) \cdot U(x)| > 0 \right\} :$$

M^{ℓ} ist die Menge aller derjenigen Punkte $x \in ((\Sigma_{\text{reg}}^{\ell})' \cap \mathcal{I})$, für die gilt, daß die Bahn durch $x = (q_x, t_x)$ bei x nicht tangential in Σ eintritt und zwischen $t = 0$ und $t = t_x$ die Hyperfläche Σ unendlich oft erreicht. $Q(0; q_x, t_x) = Q(0; x)$ liegt also in C_{∞}^{Σ} . Für alle ℓ, i gilt

$$\int_{M^{\ell} \cap \varphi^{li}(K^{li})} |J \cdot U| d\sigma = \int_{(\varphi^{li})^{-1}(M^{\ell} \cap \varphi^{li}(K^{li}))} |J(\varphi(k)) \cdot U(\varphi(k))| \sqrt{g(k)} dk.$$

Wir halten wieder die Indizes ℓ, i fest und lassen sie im folgenden weg. Wir bezeichnen $\widetilde{M} := \varphi^{-1}(M^{\ell} \cap \varphi(K))$ und zeigen, daß

$$\int_{\widetilde{M}} |J(\varphi(k)) \cdot U(\varphi(k))| \sqrt{g(k)} dk = 0. \quad (2.27)$$

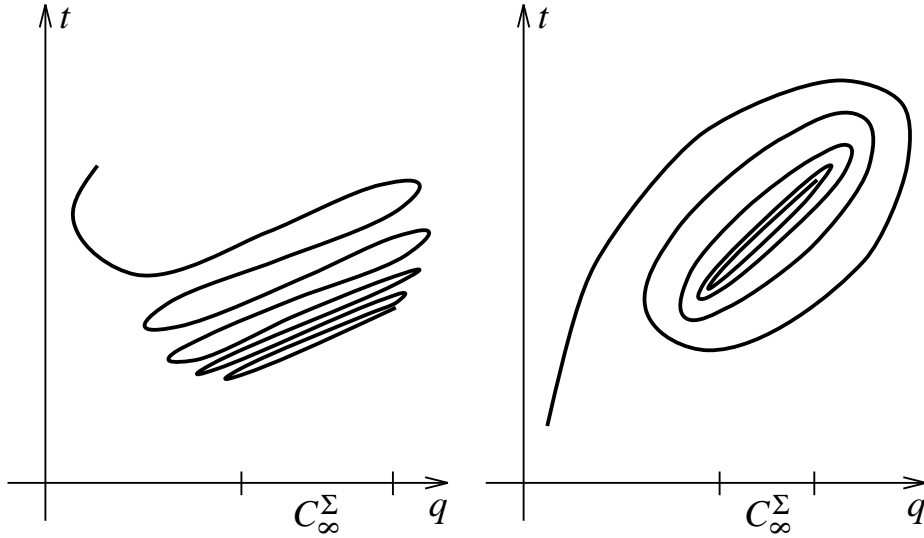


Abbildung 2.2 Beispiele für Hyperflächen Σ , die beispielsweise von Bahnen $Q(t; q_0) = q_0$ für alle t zu Anfangswerten $q_0 \in C_\infty^\Sigma$ unendlich oft durchkreuzt werden. In der Situation, die im linken Bild skizziert ist, gilt außerdem $T_n^\Sigma(q_0) = A_n^\Sigma(q_0) = T_{n+1}^\Sigma(q_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $q_0 \in C_\infty^\Sigma$.

Hierfür werden wir zeigen:

(*) Für alle $k \in \tilde{M}$ gibt es eine Umgebung $U(k)$, so daß $U(k) \cap \tilde{M}$ eine Nullmenge in \mathbb{R}^d ist.

Dann ist \tilde{M} eine Nullmenge, denn aus der Überdeckung $\bigcup_{k \in \tilde{M}} U(k)$ von $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^d$

kann man eine abzählbare Teilüberdeckung auswählen (weil der \mathbb{R}^d eine abzählbare Basis der Topologie hat, vgl. z.B. [Kel], Kapitel 1). Also ist \tilde{M} in einer abzählbaren Vereinigung von Nullmengen enthalten, folglich eine Nullmenge, und das Integral (2.27) ist Null. Damit ist dann Lemma 2.17 bewiesen.

Nun zu (*): Wir betrachten wie im Beweis von Lemma 2.13 die Abbildung $\Phi : K \rightarrow \mathcal{G}_0$, $\Phi(k) = Q(0; \varphi(k))$. \tilde{M} wurde so gewählt, daß für $k \in \tilde{M}$ gemäß (2.25) $\det \frac{\partial \Phi}{\partial k} \neq 0$ ist, folglich existieren für $k \in \tilde{M}$ und $\Phi(k) \in \mathcal{G}_0$ Umgebungen $U(k)$ und $V(\Phi(k))$, so daß Φ bijektiv von $U(k)$ nach $V(\Phi(k))$ ist. $\tilde{M} \cap U(k)$ ist das Bild von $C_\infty^\Sigma \cap V(\Phi(k))$ unter der stetig differenzierbaren Abbildung Φ^{-1} , und weil laut Voraussetzung $\mathbf{P}(C_\infty^\Sigma) = 0$ ist, C_∞^Σ also auch eine Lebesgue-Nullmenge ist, ist $\tilde{M} \cap U(k)$ eine Nullmenge, was zu zeigen war. \square

Bemerkung 2.18 Wir betrachten die Vorzeichen der Kreuzungen

$$S_n^\Sigma(q_0) := \operatorname{sgn}(w \cdot U)(X_n^\Sigma(q_0)) \quad \text{für } n = 1, \dots, Z^\Sigma(q_0)$$

und $S_n^\Sigma(q_0) := 0$ für $n > Z^\Sigma(q_0)$. Wenn die n -te Kreuzung in Richtung des Normalenvektors verläuft, ist $S_n^\Sigma = +1$, wenn sie entgegengesetzt zum Normalenvektor ist, ist $S_n^\Sigma = -1$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S_n^\Sigma) &= \mathbf{P}(S_n^\Sigma = +1) - \mathbf{P}(S_n^\Sigma = -1) \\ &= \int_{B_n^\Sigma \cap \{\operatorname{sgn}(w \cdot U) = +1\}} |J \cdot U| d\sigma - \int_{B_n^\Sigma \cap \{\operatorname{sgn}(w \cdot U) = -1\}} |J \cdot U| d\sigma \\ &= \int_{B_n^\Sigma} J \cdot U d\sigma. \end{aligned}$$

Für die Zufallsvariable der „signierten Kreuzungen“

$$Z_{\text{sig}}^\Sigma(q_0) := \sum_{n=1}^{Z^\Sigma(q_0)} S_n^\Sigma(q_0) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^\Sigma(q_0)$$

gilt demnach

$$\mathbf{E}(Z_{\text{sig}}^\Sigma) = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^\Sigma} J \cdot U d\sigma,$$

und falls $\mathbf{P}(C_\infty^\Sigma) = 0$ ist,⁶ zeigt man wie in Lemma 2.17, daß

$$\mathbf{E}(Z_{\text{sig}}^\Sigma) = \int_{\Sigma'} J \cdot U d\sigma.$$

Beispiel 2.19 Sei $\Sigma = \partial\Gamma \times [0, T]$, wobei Γ ein Kompaktum mit glattem Rand sei, so daß das Normalenfeld U orientierbar ist. Der Träger der Wellenfunktion liege für $t = 0$ in Γ , $\mathbf{P}(\Gamma) = 1$, so daß alle Bohmschen Teilchen in Γ starten. Dann gilt $S_n^\Sigma = +1$ für alle ungeraden n und $S_n^\Sigma = -1$ für alle geraden n . Z_{sig}^Σ nimmt nur die Werte 0 und 1 an, wobei $Z_{\text{sig}}^\Sigma = 0 \iff$ das Teilchen ist zur Zeit T in Γ , und $Z_{\text{sig}}^\Sigma = 1 \iff$ das Teilchen ist zur Zeit T außerhalb von Γ . Folglich ist, falls $\mathbf{P}(C_\infty^\Sigma) = 0$ ist, $\mathbf{E}(Z_{\text{sig}}^\Sigma) = \mathbf{P}(Z_{\text{sig}}^\Sigma = 1) = \int_{\Sigma'} J \cdot U d\sigma$ die Wahrscheinlichkeit, daß das Teilchen zur Zeit T außerhalb des Gebietes Γ ist.

⁶ Eine hinreichende Bedingung hierfür ist $\int_{\Sigma} |J \cdot U| d\sigma < \infty$, vgl. den Beweis von Lemma 2.17.

2.4 Ein Existenzsatz

In diesem Abschnitt beweisen wir unseren zentralen Satz über die Existenz globaler Lösungen der Bohmschen Mechanik. Zusätzlich zu den Annahmen A1–A3 (vgl. Abschnitt 2.1.2) benötigen wir die folgenden Voraussetzungen:

A4: Für alle $T > 0$ sei $\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \psi_t|^2 dq dt < \infty$;

A5: $\mathcal{S} \subset \bigcup_{l=1}^m \mathcal{S}_l$, wobei $m < \infty$ sei und die \mathcal{S}_l $(d-3)$ -dimensionale Hyperebenen seien.

Satz 2.20 *Es gelte A1–A5. Dann ist $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 0$.*

Die $(d-3)$ -dimensionale Hyperebene \mathcal{S}_l kann dargestellt werden als $\mathcal{S}_l = \{\mathbf{y}_l = \mathbf{a}_l\}$, wobei \mathbf{y}_l die Projektion auf \mathcal{S}_l^\perp bezeichnet, d.h. die Abbildung $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^3, q \mapsto (q \cdot y_l^1, q \cdot y_l^2, q \cdot y_l^3)$ mit den drei orthogonalen Einheitsvektoren y_l^1, y_l^2, y_l^3 , die senkrecht auf der Hyperebene \mathcal{S}_l stehen, und $\mathbf{a}_l \in \mathbb{R}^3$ ist eine Konstante.

Die Bedingung A5 an die Form von $\mathcal{S} = \partial\Omega$ ist sehr natürlich im $(\nu = 3)$ -dimensionalen physikalischen Raum. Für ein Zentralpotential — wie der erste Term von (1.5) — ist $\mathcal{S}_l = \{\mathbf{q}_i = 0\}$, und für ein Paarwechselwirkungspotential — wie (1.4) und der zweite Term von (1.5) — ist $\mathcal{S}_l = \{\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j = 0\}$ für $1 \leq i < j \leq N$. Man beachte, daß im Fall $d = \nu N < 3$ die Bedingung A5 $\mathcal{S} = \emptyset$ verlangt.

Lemma 2.21 *Unter der Annahme A5 ist $\Omega^c = \partial\Omega$.*

Beweis Man überzeugt sich leicht davon, daß für ein \mathcal{S} , das A5 erfüllt, $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{S}$ wegzusammenhängend ist. Deshalb ist $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega} = \emptyset$, denn sonst wäre $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{S}$ darstellbar als Vereinigung der beiden nichtleeren disjunkten offenen Mengen Ω und $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$. \square

Folglich brauchen wir — wenn A5 gilt — zwischen $L^2(\Omega)$ und $L^2(\mathbb{R}^d)$ nicht zu unterscheiden. Für $\psi \in \mathcal{Q}(H_0)$ gilt

$$(\nabla \psi, \nabla \psi) \leq M(\psi, H_0 \psi) \quad \text{mit} \quad M := \frac{2}{\hbar^2} \max(m_1, \dots, m_N). \quad (2.28)$$

Die Bedingung A4 der „endlichen integrierten kinetischen Energie“ kann erfüllt werden, indem die quadratische Form $(\nabla \psi_t, \nabla \psi_t) \leq M(\psi_t, H_0 \psi_t)$ durch die Form

$(\psi_t, H\psi_t)$ beschränkt wird, die endlich und zeitunabhängig ist für ψ_0 (und folglich ψ_t) aus dem Formdefinitionsbereich $\mathcal{Q}(H) (\supset \mathcal{D}(H) \supset C^\infty(H))$ des Hamiltonoperators H . Dies gelingt unter der Bedingung **A2'**, die **A2** ersetzt, an das Potential und für eine spezielle selbstadjungierte Erweiterung, nämlich die Formsumme (vgl. Abschnitt 2.1.1 und Korollar 2.1).

A2': $V = V_1 + V_2$, $V_1 \in C^\infty(\Omega)$ sei nach unten beschränkt, $V_2 \in C^\infty(\Omega)$ sei H_0 -formbeschränkt mit relativer Schranke $\tilde{a} < 1$, und H sei die Formsumme $H_0 + V$.

Korollar 2.22 *Es gelte **A1**, **A2'**, **A3** und **A5**. Dann ist $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 0$.*

Beweis Mit Satz 2.20 ist nur **A4** zu zeigen. V_2 ist H_0 -formbeschränkt, d.h. $\mathcal{Q}(H_0) \subset \mathcal{Q}(V_2)$ und für $\psi \in \mathcal{Q}(H_0)$ existieren Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ so daß

$$|(\psi, V_2\psi)| \leq a(\psi, H_0\psi) + b(\psi, \psi).$$

Weil für alle $q \in \Omega$ $V_1(q) \geq -c$, $c \in \mathbb{R}$, erhalten wir für $\psi \in \mathcal{Q}(H) = \mathcal{Q}(H_0) \cap \mathcal{Q}(V_1)$, daß

$$\begin{aligned} (1-a)(\psi, H_0\psi) &\leq (\psi, (H_0 + V_2)\psi) + b(\psi, \psi) \\ &\leq (\psi, (H_0 + V_1 + V_2)\psi) + c(\psi, \psi) + b(\psi, \psi) \\ &= (\psi, H\psi) + (b+c)(\psi, \psi). \end{aligned}$$

Folglich gilt mit $a < 1$, daß für $\psi_0 \in \mathcal{Q}(H) \subset \mathcal{Q}(H_0)$ und alle t

$$\begin{aligned} \frac{1}{M}(\nabla\psi_t, \nabla\psi_t) &\leq (\psi_t, H_0\psi_t) \leq \frac{1}{1-a}(\psi_t, H\psi_t) + \frac{b+c}{1-a}(\psi_t, \psi_t) \\ &= \frac{1}{1-a}(\psi_0, H\psi_0) + \frac{b+c}{1-a}\|\psi_0\|^2. \end{aligned}$$

Es folgt **A4**. □

Wir zeigen, daß für die in Korollar 2.22 betrachtete Klasse von Potentialen der Hamiltonoperator reell ist.

Lemma 2.23 *Die nach unten beschränkte abgeschlossene quadratische Form q mit dichtem Formdefinitionsbereich $\mathcal{Q}(q)$ erfülle*

- (i) $C\mathcal{Q}(q) = \mathcal{Q}(q)$, wobei C die komplexe Konjugation bezeichne, und
- (ii) $q(C\phi, C\psi) = q(\phi^*, \psi^*) = (q(\phi, \psi))^* = Cq(\phi, \psi)$.

Dann ist der assoziierte selbstadjungierte Operator A reell.

Beweis Es gilt $\mathcal{D}(A) = \{\phi \in \mathcal{Q}(q) : \exists \tilde{\phi} \in \mathcal{H} \text{ mit } q(\phi, \psi) = (\tilde{\phi}, \psi) \text{ für alle } \psi \in \mathcal{Q}(q)\}$, und $A\phi = \tilde{\phi}$. Sei $\phi \in \mathcal{D}(A)$. Zu zeigen ist $\phi^* \in \mathcal{D}(A)$ und $A\phi^* = (A\phi)^*$. Dies ist offensichtlich mit $(\tilde{\phi}^*) = (\tilde{\phi})^*$. \square

Man könnte q als „konjugationsinvariant“ bezeichnen; der Begriff „reell“, der die Analogie dieser Eigenschaft zur Eigenschaft eines Operators, reell zu sein, ausdrückt, ist für quadratische Formen bereits belegt. Die quadratischen Formen q_{H_0} und q_{V_i} erfüllen offensichtlich (i) und (ii), und damit erfüllt auch ihre Summe $q_H = q_{H_0} + q_{V_1} + q_{V_2}$ mit $\mathcal{Q}(H) = \mathcal{Q}(H_0) \cap \mathcal{Q}(V_1)$ die Bedingungen (i) und (ii). Mit Bemerkung 2.8 folgt, daß unter den Voraussetzungen von Korollar 2.22 auch $\mathbf{P}(\tau^- > -\infty) = 0$ gilt, d.h. *zur Bohmschen Gleichung (1.2) existieren eindeutige und globale Lösungen für \mathbf{P} -fast alle Anfangskonfigurationen Q_0 .*

Bemerkung 2.24 Globale Existenz der Bohmschen Bahnen gilt folglich für eine sehr große Klasse von Potentialen: Es sind (vgl. Abschnitt 2.1.1) Paarwechselwirkungspotentiale der Form $r^{-\alpha}$ mit $0 < \alpha < 2$ enthalten und deshalb das physikalisch interessante Potential der N -Teilchen-Coulombwechselwirkung mit beliebigen Massen und Ladungen (1.4) und das atomare Potential (1.5). (Die Klasse der H_0 -formbeschränkten Potentiale enthält die besser bekannte Klasse der H_0 -(Operator-)beschränkten Potentiale (vgl. Abschnitt 2.1.1), in der bereits die N -Teilchen-Coulombwechselwirkung enthalten ist.) Natürlich sind auch alle Potentiale, die durch eines der oben beschriebenen Potentiale beschränkt sind, wie beispielsweise eine abgeschirmte Coulombwechselwirkung, zugelassen. Zusätzlich sind beliebige nach unten beschränkte Potentiale enthalten: Wichtige Beispiele sind das harmonische Potential und beliebig starke abstoßende (positive) Potentiale.

Bemerkung 2.25 Die Klassen von Potentialen bzw. Hamiltonoperatoren, für die wir in Satz 2.20 und Korollar 2.22 globale Existenz der Bohmschen Bahnen zeigen, sind also sehr umfassend. Trotzdem kann man sofort sehen, daß die Voraussetzungen nicht notwendig sind: Wie bereits erwähnt, ist H_{\min} insbesondere für $V = -1/r$, $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ (das „Wasserstoffatom“) nicht wesentlich selbstadjungiert. Für eine bestimmte selbstadjungierte Erweiterung — die Formsumme — existieren globale Lösungen von (1.2) für alle $\psi_0 \in C^\infty(H)$ und \mathbf{P} -fast alle Anfangskonfigurationen Q_0 gemäß Korollar 2.22. Es gibt jedoch (unendlich viele) andere selbstadjungierte Erweiterungen. Wenn man Kugelkoordinaten einführt und den radialen Teil des Hamiltonoperators zum Drehimpuls $l = 0$ untersucht, so findet man Eigenfunktionen der anderen selbstadjungierten Erweiterungen, deren Eigenwerte tiefer liegen als diejenigen von Eigenfunktionen der Formsumme.

Diese Eigenfunktionen divergieren bei $r = 0$ wie $\psi \sim r^{-1}$, im Unterschied zu den Eigenfunktionen der Formsumme, die bei $r = 0$ endlich sind [JöRe]. Für diese (reellen) Eigenfunktionen ist $v^\psi = 0$, die Lösungen der Bohmschen Gleichung (1.2) existieren also trivialerweise global, aber die Bedingungen A2' bzw. A4 sind verletzt (letztere weil $\psi' \sim r^{-2}$ bei $r = 0$, folglich ist $\nabla\psi \notin L^2(\mathbb{R}^3)$).

Beweis von Satz 2.20 Wir zeigen (2.16) — für alle $T > 0$, $\mathbf{P}(\tau < T) = 0$ — entsprechend der in Abschnitt 2.3 erläuterten Vorgehensweise.

Zunächst wählen wir geeignete Mengen \mathcal{N}^ϵ , \mathcal{S}^δ und \mathcal{K}^r . Für $\epsilon > 0$ setzen wir

$$\mathcal{N}^\epsilon := \bigcup_{k: C^\epsilon(k) \cap \mathcal{N} \neq \emptyset} C^\epsilon(k), \quad (2.29)$$

wobei $(C^\epsilon(k))_{k \in \mathbb{N}}$ eine Zerlegung von Konfigurationsraum-Zeit in abgeschlossene Würfel mit Seitenlänge ϵ ist, deren Würfelkanten mit den Richtungen der kanonischen Basisvektoren des \mathbb{R}^{d+1} zusammenfallen mögen. Für \mathcal{S}^δ wählen wir eine δ -Umgebung von \mathcal{S} mit $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_m) \in (\mathbb{R}^+)^m$ (wir erinnern daran, daß $\mathcal{S} \subset \bigcup_{l=1}^m \mathcal{S}_l$ mit $\mathcal{S}_l = \{\mathbf{y}_l = \mathbf{a}_l\}$)

$$\mathcal{S}^\delta := \bigcup_{l=1}^m \mathcal{S}_l^{\delta_l}, \quad \mathcal{S}_l^{\delta_l} := \{q \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(q, \mathcal{S}_l) \leq \delta_l\} = \{|\mathbf{y}_l - \mathbf{a}_l| \leq \delta_l\}.$$

Um das Entweichen nach Unendlich zu kontrollieren, wählen wir offene Kugeln mit Radien $r \in \mathbb{R}^+$

$$\mathcal{K}^r := \{q \in \mathbb{R}^d : |q| < r\}.$$

Hiermit erfüllt $\mathcal{G}^{\epsilon\delta r}$ die Bedingungen von Korollar 2.11. Mithilfe von (2.17), (2.19) und (2.26) erhalten wir, daß für alle $T > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau < T) &\leq \mathbf{P}(\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r}) + \mathbf{P}(\tau^{\epsilon\delta r} < T) \\ &\leq \mathbf{P}(\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r}) + \mathbf{P}(X^{\epsilon\delta r T} \in (\partial\mathcal{K}^r \times [0, T]) \cap \mathcal{G}) \\ &\quad + \mathbf{P}(X^{\epsilon\delta r T} \in (\partial\mathcal{S}^\delta \times [0, T]) \cap \mathcal{G}) + \mathbf{P}(X^{\epsilon\delta r T} \in \partial\mathcal{N}^\epsilon \cap \mathcal{G}_{[0, T]}^{\delta r}) \\ &\leq \mathbf{P}(\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r}) + \mathbf{I}(r) + \mathbf{S}(\delta) + \mathbf{N}(\epsilon, \delta, r). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Das Verschwinden der vier Terme auf der rechten Seite von (2.30) im Limes $\epsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ und $r \rightarrow \infty$ ist Inhalt der folgenden Lemmata, deren Beweise wir nachstellen:

Lemma 2.26 *Unter den Annahmen A1–A3 gilt*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, r \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r}) = 0,$$

unabhängig von der Reihenfolge der Limesbildung.

Lemma 2.27 *Es gelte A1–A4. Dann existiert für alle $T > 0$ eine Folge $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $r_k \rightarrow \infty$ wenn $k \rightarrow \infty$, für die gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{I}(r_k) = 0.$$

Lemma 2.28 *Es gelte A1–A5 und $d \geq 3$. Dann gibt es für alle $T > 0$ eine Folge von $(\mathbb{R}^+)^m$ -Vektoren $(\delta^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $|\delta^{(k)}| \rightarrow 0$ wenn $k \rightarrow \infty$, für die gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{S}(\delta^{(k)}) = 0.$$

Lemma 2.29 *Es gelte A1–A3. Dann gilt für alle $T > 0, r < \infty$ und $\delta > 0$*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{N}(\epsilon, \delta, r) = 0.$$

Wir schließen zunächst den Beweis von Satz 2.20 ab. Wenn $d \geq 3$ ist, folgt aus den Lemmata 2.26–2.29 daß die rechte Seite von (2.30) gegen 0 geht, wenn zuerst der Limes $\epsilon \rightarrow 0$ bei festen $\delta > 0$ und $r < \infty$, danach $\delta \rightarrow 0$ und $r \rightarrow \infty$ entlang der Folgen $\delta^{(k)}$ und r_k in beliebiger Reihenfolge genommen wird. Wenn $d < 3$ ist, dann ist nach Annahme A5 $\mathcal{S} = \emptyset$ und folglich $\mathbf{S} \equiv 0$. Lemmata 2.26, 2.27 und 2.29 zeigen, daß die rechte Seite von (2.30) gegen 0 geht, wenn zunächst der Limes $\epsilon \rightarrow 0$ bei festem $r < \infty$ und danach der Limes $r \rightarrow \infty$ entlang r_k genommen wird. \square

Beweis von Lemma 2.26 $\mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r} = (\mathcal{K}^r \cap \Omega) \setminus (\mathcal{N}_0^\epsilon \cup \mathcal{S}^\delta)$ und deshalb ist

$$\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r} = (\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{K}^r) \cup (\mathcal{G}_0 \cap \mathcal{S}^\delta) \cup (\mathcal{G}_0 \cap \mathcal{N}_0^\epsilon),$$

folglich gilt

$$\mathbf{P}(\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r}) \leq \mathbf{P}(\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{K}^r) + \mathbf{P}(\mathcal{G}_0 \cap \mathcal{S}^\delta) + \mathbf{P}(\mathcal{G}_0 \cap \mathcal{N}_0^\epsilon). \quad (2.31)$$

\mathbf{P} ist das Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Dichte $|\psi_0|^2$, und die \mathbf{P} -Nullmenge \mathcal{N}_0 ist aufgrund der Stetigkeit von ψ , die laut Satz 2.2 aus A1–A3 folgt, abgeschlossen. Damit folgt das Verschwinden der 3 Terme auf der rechten Seite von (2.31) im Limes $r \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ bzw. $\epsilon \rightarrow 0$ jeweils aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz. \square

Beweis von Lemma 2.27

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(r) &= \int_{(\partial\mathcal{K}^r \times [0, T]) \cap \mathcal{G}} |J^{\psi_t}(q) \cdot U| \, d\sigma \\ &= \int_0^T \int_{\partial\mathcal{K}^r \cap \Omega} |j^{\psi_t}(q) \cdot u| \, ds \, dt \leq \int_0^T \int_{\partial\mathcal{K}^r \cap \Omega} |j^{\psi_t}(q)| \, ds \, dt, \end{aligned}$$

wobei ds das $(d-1)$ -dimensionale Oberflächenelement von $\partial\mathcal{K}^r$ und u das Einheitsnormalenvektorfeld auf $\partial\mathcal{K}^r$ bezeichnet. Man beachte nun (2.13): $j^\psi = (\mathbf{j}_1^\psi, \dots, \mathbf{j}_N^\psi)$ und

$$|\mathbf{j}_k^\psi| = \frac{\hbar}{2m_k} |\psi^* \nabla_k \psi - \psi \nabla_k \psi^*| \leq \frac{\hbar}{m_k} |\psi| |\nabla_k \psi| \leq \mu |\psi| |\nabla_k \psi|$$

mit $\mu = \hbar / \min(m_1, \dots, m_N)$, folglich gilt $|j^\psi| \leq \mu |\psi| |\nabla \psi|$. Damit ist

$$\mathbf{I}(r) \leq \mu \int_0^T \int_{\partial\mathcal{K}^r \cap \Omega} |\psi_t| |\nabla \psi_t| \, ds \, dt =: \mu \tilde{\mathbf{I}}(r).$$

Um zu zeigen, daß $\tilde{\mathbf{I}}(r)$ nach 0 geht entlang einer Folge (r_k) , zeigen wir eine stärkere Aussage, nämlich daß $\tilde{\mathbf{I}}(r)$ integrierbar über $r \in \mathbb{R}^+$ ist. Dies gilt, weil $\int_0^\infty \tilde{\mathbf{I}}(r) \, dr$ das Volumenintegral von $|\psi_t| |\nabla \psi_t|$ ergibt, das wie folgt abgeschätzt werden kann:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \tilde{\mathbf{I}}(r) \, dr &= \int_0^T \int_\Omega |\psi_t| |\nabla \psi_t| \, dq \, dt \leq \int_0^T \|\psi_t\| \left(\int_\Omega |\nabla \psi_t|^2 \, dq \right)^{1/2} dt \\ &\leq \int_0^T \left(1 + \int_\Omega |\nabla \psi_t|^2 \, dq \right) dt = T + \int_0^T \int_\Omega |\nabla \psi_t|^2 \, dq < \infty, \end{aligned}$$

wobei die erste Ungleichung die Schwarzsche Ungleichung ist (aus der Annahme A4 folgt, daß $\nabla \psi_t \in L^2(\Omega)$ für fast alle t), die zweite Ungleichung elementar ist (mit A2 $\implies \|\psi_t\| = 1$ für alle t), und die dritte Ungleichung wegen A4 gilt. Man sieht nun leicht, daß es die behauptete Folge $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $r_k \rightarrow \infty$ wenn $k \rightarrow \infty$ gibt, entlang der $\tilde{\mathbf{I}}(r_k) \rightarrow 0$. Denn $\tilde{\mathbf{I}}(r)$ ist positiv, folglich ist $\inf_{k \leq r < k+1} \tilde{\mathbf{I}}(r) =: i_k \geq 0$. Es gibt also einen Punkt r_k , $k \leq r_k < k+1$ mit $i_k \leq \tilde{\mathbf{I}}(r_k) \leq i_k + 2^{-k}$. Es gilt

$$\sum_{k=1}^\infty \tilde{\mathbf{I}}(r_k) \leq \sum_{k=1}^\infty (i_k + 2^{-k}) \leq \int_0^\infty \tilde{\mathbf{I}}(r) \, dr + 1 < \infty,$$

folglich ist $\tilde{\mathbf{I}}(r_k)$ eine Nullfolge. □

Beweis von Lemma 2.28 Wir werden die folgende Ungleichung verwenden: für $\psi \in \mathcal{Q}(H_0)$ und $d \geq 3$ ist

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\psi|^2}{4|\mathbf{y}_l - \mathbf{a}_l|^2} dq \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \psi|^2 dq. \quad (2.32)$$

Dies folgt aus einer wohlbekanntenen Ungleichung, siehe Lemma 4.3 im Anhang.

Wie im Beweis von Lemma 2.27 und mit $\partial \mathcal{S}^\delta \subset \bigcup_{l=1}^m \partial \mathcal{S}_l^{\delta_l}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\delta) &= \int_{(\partial \mathcal{S}^\delta \times [0, T]) \cap \mathcal{G}} |J^{\psi_t}(q) \cdot U| d\sigma = \int_0^T \int_{\partial \mathcal{S}^\delta \cap \Omega} |j^{\psi_t}(q) \cdot u| ds dt \\ &\leq \mu \sum_{l=1}^m \int_0^T \int_{\partial \mathcal{S}_l^{\delta_l} \cap \Omega} |\psi_t| |\nabla \psi_t| ds dt =: \mu \sum_{l=1}^m \tilde{\mathbf{S}}_l(\delta_l). \end{aligned}$$

Wir integrieren nun $\frac{1}{|\mathbf{y}_l - \mathbf{a}_l|} \tilde{\mathbf{S}}_l(\delta_l)$ über $\delta_l = |\mathbf{y}_l - \mathbf{a}_l|$: Aus der Definition von $\mathcal{S}_l^{\delta_l} = \{|\mathbf{y}_l - \mathbf{a}_l| \leq \delta_l\}$ folgt, daß man das Volumenintegral von $\frac{|\psi|}{|\mathbf{y}_l - \mathbf{a}_l|} |\nabla \psi|$ erhält. Mit Lemma 2.21, der Schwarzschen Ungleichung, Ungleichung (2.32) und Annahme A4 erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{\delta_l} \tilde{\mathbf{S}}_l(\delta_l) d\delta_l &= \int_0^T \int_{\Omega} \frac{|\psi_t|}{|\mathbf{y}_l - \mathbf{a}_l|} |\nabla \psi_t| dq dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\psi_t|}{|\mathbf{y}_l - \mathbf{a}_l|} |\nabla \psi_t| dq dt \\ &\leq \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\psi_t|^2}{|\mathbf{y}_l - \mathbf{a}_l|^2} dq \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \psi_t|^2 dq \right)^{1/2} dt \\ &\leq 2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \psi_t|^2 dq dt < \infty. \end{aligned}$$

Weil $1/\delta_l$ nicht integrierbar ist bei $\delta_l = 0$, existiert für jedes l eine Folge $(\delta_l^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\delta_l^{(k)} \rightarrow 0$ wenn $k \rightarrow \infty$, entlang welcher $\tilde{\mathbf{S}}_l(\delta_l^{(k)}) \rightarrow 0$: wegen $\inf_{e^{-(k+1)} \leq \delta_l < e^{-k}} \tilde{\mathbf{S}}_l(\delta_l) =: s_{lk} \geq 0$ gibt es einen Punkt $\delta_l^{(k)}$, $e^{-(k+1)} \leq \delta_l^{(k)} < e^{-k}$ mit $\tilde{\mathbf{S}}_l(\delta_l^{(k)}) \leq s_{lk} + 2^{-k}$. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathbf{S}}_l(\delta_l^{(k)}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (s_{lk} + 2^{-k}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} s_{lk} \int_{e^{-(k+1)}}^{e^{-k}} \frac{dx}{x} \leq 1 + \int_0^\infty \frac{\tilde{\mathbf{S}}_l(\delta_l)}{\delta_l} d\delta_l < \infty,$$

folglich ist $\tilde{\mathbf{S}}_l(\delta_l^{(k)})$ eine Nullfolge. \square

Zu den Beweisen von Lemmata 2.27 und 2.28 vergleiche auch Friedrichs ([Fri], S. 711f.), der in Zusammenhang mit der Untersuchung einer bestimmten selbstadjungierten Erweiterung — der sogenannten Friedrichs-Erweiterung — nach unten

beschränkter Operatoren auf ähnliche Weise das Verschwinden von Randtermen bei der Greenschen Formel zeigt. Zum Zusammenhang zwischen der Selbstadjungiertheit des Hamiltonoperators und der globalen Existenz der Bohmschen Bahnen siehe Kapitel 3, insbesondere den Absatz um Gleichung (3.4).

Beweis von Lemma 2.29 Sei $\eta > 0$ und $\psi' = \left(\nabla\psi, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$. Wir teilen den Teil von \mathcal{N}^ϵ , der zur Fläche $\partial\mathcal{N}^\epsilon \cap \mathcal{G}_{[0,T]}^{\delta r}$ beiträgt, in zwei (nicht notwendig disjunkte) Mengen

$$\mathcal{N}_{<}^\epsilon := \bigcup_{k \in I_{<}} C^\epsilon(k) \quad \text{und} \quad \mathcal{N}_{>}^\epsilon := \bigcup_{k \in I_{>}} C^\epsilon(k) \quad \text{mit}$$

$$I_{<} := \{k \in \mathbb{N} : C^\epsilon(k) \cap \{(q, t) : \psi(q, t) = 0, |\psi'(q, t)| \leq \eta\} \cap \mathcal{G}_{[0,T]}^{\delta r} \neq \emptyset\},$$

$$I_{>} := \{k \in \mathbb{N} : C^\epsilon(k) \cap \{(q, t) : \psi(q, t) = 0, |\psi'(q, t)| > \eta\} \cap \mathcal{G}_{[0,T]}^{\delta r} \neq \emptyset\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\epsilon, \delta, r) &= \int_{\partial\mathcal{N}^\epsilon \cap \mathcal{G}_{[0,T]}^{\delta r}} |J^{\psi_t}(q) \cdot U| d\sigma \\ &\leq \int_{\partial\mathcal{N}_{<}^\epsilon} |J^{\psi_t}(q)| d\sigma + \int_{\partial\mathcal{N}_{>}^\epsilon} |J^{\psi_t}(q)| d\sigma. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Nach Satz 2.2 ist mit A1–A3 $\psi \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$. Auf dem Kompaktum $\mathcal{G}_{[-1, T+1]}^{(\delta/2)(r+1)} \subset \Omega \times \mathbb{R}$ (vgl. (2.18)) existiert folglich eine globale Lipschitzkonstante L für ψ' und eine globale Schranke K für $|\psi'|$. Für $\epsilon < \min\left(\frac{\min(\delta_1, \dots, \delta_m)}{2\sqrt{d}}, \frac{1}{\sqrt{d}}\right)$ gilt $\mathcal{N}_{>}^\epsilon \subset \mathcal{G}_{[-1, T+1]}^{(\delta/2)(r+1)}$. Sei also $\epsilon < \min\left(\frac{\min(\delta_1, \dots, \delta_m)}{2\sqrt{d}}, \frac{1}{\sqrt{d}}\right)$.

Wir betrachten zunächst $\mathcal{N}_{<}^\epsilon$: Auf dieser Menge ist der Fluß $|J^\psi|$ sehr klein. Wir werden das Integral abschätzen, indem wir einfach eine geeignete Schranke an $|J^\psi|$ mit der gesamten Oberfläche aller Würfel in $\mathcal{G}_{[-1, T+1]}^{(\delta/2)(r+1)}$ multiplizieren. In jedem ϵ -Würfel C^ϵ von $\mathcal{N}_{<}^\epsilon$ gibt es einen Punkt $(q^*, t^*) \in \mathcal{N}$ mit $|\psi'(q^*, t^*)| \leq \eta$. Deshalb gilt in jedem ϵ -Würfel von $\mathcal{N}_{<}^\epsilon$ und folglich für alle $(q, t) \in \mathcal{N}_{<}^\epsilon$

$$|\psi'(q, t)| \leq \eta + L\sqrt{d+1}\epsilon.$$

Hieraus folgt, daß ψ in jedem ϵ -Würfel von $\mathcal{N}_{<}^\epsilon$ und folglich für alle $(q, t) \in \mathcal{N}_{<}^\epsilon$ beschränkt ist durch

$$|\psi(q, t)| \leq (\eta + L\sqrt{d+1}\epsilon)\sqrt{d+1}\epsilon =: c_1\eta\epsilon + c_2\epsilon^2.$$

Der Fluß ist beschränkt durch

$$\begin{aligned} |J^\psi| &= \sqrt{(|\psi|^2)^2 + |j^\psi|^2} \leq |\psi|^2 + |j^\psi| \leq |\psi|^2 + \mu|\psi| |\nabla\psi|, \\ &\leq (c_1\eta\epsilon + c_2\epsilon^2)^2 + \mu(c_1\eta\epsilon + c_2\epsilon^2)(\eta + L\sqrt{d+1}\epsilon). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Um die Oberfläche von $\mathcal{N}_<^\epsilon$ zu beschränken, zählen wir einfach die Oberflächen aller ϵ -Würfeln in $\mathcal{G}_{[-1, T+1]}^{(\delta/2)(r+1)}$ zusammen. Die Anzahl von ϵ -Würfeln in $\mathcal{G}_{[-1, T+1]}^{(\delta/2)(r+1)}$ ist beschränkt durch c_3/ϵ^{d+1} mit

$$c_3(r, T, d) = (T+2)(2r+2)^d,$$

und die Oberfläche eines einzelnen Würfels ist gleich $2(d+1)\epsilon^d$. Folglich ist

$$|\partial\mathcal{N}_<^\epsilon| \leq \frac{2(d+1)c_3}{\epsilon},$$

und insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{N}_<^\epsilon} |J^\psi| d\sigma &\leq |\partial\mathcal{N}_<^\epsilon| \sup_{\mathcal{N}_<^\epsilon} |J^\psi| \\ &\leq \frac{2(d+1)c_3}{\epsilon} \left((c_1\eta\epsilon + c_2\epsilon^2)^2 + \mu(c_1\eta\epsilon + c_2\epsilon^2)(\eta + L\sqrt{d+1}\epsilon) \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Nun betrachten wir die Menge $\mathcal{N}_>^\epsilon$. Auf dieser Menge können wir die Größe der Fläche $\partial\mathcal{N}_>^\epsilon$ beschränken. Wir benötigen eine weitere Einteilung der Konfigurationsraum-Zeit in Würfel $(C^\gamma(k))_{k \in \mathbb{N}}$ der Kantenlänge γ , deren Seiten parallel zu den Seiten der C^ϵ -Würfel orientiert seien. Wähle γ so klein, daß jeder C^γ -Würfel, der einen nichtleeren Schnitt mit $\mathcal{N}_>^\epsilon$ hat, vollständig in $\mathcal{G}_{[-1, T+1]}^{(\delta/2)(r+1)}$ liegt, d.h. $\gamma < \min\left(\frac{\min(\delta_1, \dots, \delta_m)}{2\sqrt{d}} - \epsilon, \frac{1}{\sqrt{d}} - \epsilon\right)$. (γ wird später proportional zu η gewählt, und wir werden den Limes $\epsilon \rightarrow 0$ vor dem Limes $\eta \rightarrow 0$ nehmen. Deshalb ist schließlich $\gamma \gg \epsilon$.)

Man betrachte den k -ten γ -Würfel $C^\gamma(k)$. Wenn $C^\gamma(k)$ einen nichtleeren Schnitt mit $\mathcal{N}_>^\epsilon$ hat, gibt es einen Punkt $(q^*, t^*) \in \mathcal{N} \cap C_\epsilon^\gamma(k)$ mit $|\psi'(q^*, t^*)| > \eta$, wobei $C_\epsilon^\gamma(k) := \{(q, t) : \text{dist}((q, t), C^\gamma(k)) \leq \epsilon\}$ die ϵ -Umgebung von $C^\gamma(k)$ bezeichnet. $|\psi'(q^*, t^*)| > \eta$ impliziert mit $\psi_1 := \text{Re } \psi$ und $\psi_2 := \text{Im } \psi$

$$|\psi'_i(q^*, t^*)| > \frac{\eta}{\sqrt{2}} \quad \text{für } i = 1 \text{ oder für } i = 2.$$

Wir zeigen nun, daß in jedem γ -Würfel die Anzahl von ϵ -Würfeln in $\mathcal{N}_>^\epsilon$ verglichen mit $(\gamma/\epsilon)^{d+1}$ klein ist. Sei e_k der Basisvektor von \mathbb{R}^{d+1} , der der Richtung von

$\psi'_i(q^*, t^*)$ am nächsten kommt, d.h. der, für den $|e_k \cdot \psi'_i(q^*, t^*)|$ maximal ist. Es gilt

$$|e_k \cdot \psi'_i(q^*, t^*)| > \frac{\eta}{\sqrt{2(d+1)}},$$

und folglich gilt für alle $(q, t) \in C_\epsilon^\gamma(k)$

$$|e_k \cdot \psi'_i(q, t)| > \frac{\eta}{\sqrt{2(d+1)}} - L\sqrt{d+1}(\gamma + 2\epsilon).$$

(Hierfür muß natürlich γ so klein sein, daß die C_ϵ^γ -Würfel vollständig in $\mathcal{G}_{[-1, T+1]}^{(\delta/2)(r+1)}$ liegen.) Wir wählen nun γ so daß $L\sqrt{d+1}(\gamma+2\epsilon) = \frac{\eta}{2\sqrt{2(d+1)}}$, d.h. $\gamma = c_4\eta - 2\epsilon$

mit $c_4 := (2L\sqrt{2}(d+1))^{-1}$. Dann gilt für alle $(q, t) \in C_\epsilon^\gamma(k)$

$$|e_k \cdot \psi'_i(q, t)| > \frac{\eta}{2\sqrt{2(d+1)}}. \quad (2.36)$$

Seien x und y zwei Raumzeitpunkte in $C^\gamma(k) \cap \mathcal{N}^\epsilon$ mit $\psi(y) = 0$ und $x - y = le_k, l > 0$. Dann gilt zum einen

$$|\psi_i(x)| \leq K\sqrt{d+1}\epsilon,$$

zum anderen folgt aus dem Mittelwertsatz unter Beachtung von (2.36), daß $|\psi_i(x)| \geq \frac{l\eta}{2\sqrt{2(d+1)}}$. Durch Vergleich folgt $l \leq 2K\sqrt{2}(d+1)\epsilon/\eta =: c_5\epsilon/\eta$. Die

Anzahl der ϵ -Würfel in Richtung von e_k ist demnach beschränkt durch $c_5/\eta + 1$. (Man kann sogar argumentieren, daß es in Richtung von e_k höchstens endlich viele ϵ -Würfel in $C^\gamma(k) \cap \mathcal{N}_>^\epsilon$ gibt, unabhängig von η , aber abhängig von der Dimension d .)

In den übrigen d Richtungen ist die Anzahl beschränkt durch $(\gamma/\epsilon)+2$. Die Anzahl von γ -Würfeln in $\mathcal{G}_{[-1, T+1]}^{(\delta/2)(r+1)}$ ist beschränkt durch c_3/γ^{d+1} . Hieraus erhalten wir eine Schranke an die Oberfläche von $\mathcal{N}_>^\epsilon$

$$|\partial\mathcal{N}_>^\epsilon| \leq \left(\frac{c_5}{\eta} + 1\right) \left(\frac{c_4\eta}{\epsilon}\right)^d \frac{c_3}{(c_4\eta - 2\epsilon)^{d+1}} 2(d+1)\epsilon^d.$$

$|J^\psi|$ kann wie in (2.34) beschränkt werden, wenn man die globale Schranke K für $|\psi'|$ heranzieht: es ist

$$|J^\psi| \leq K^2(d+1)\epsilon^2 + \mu K^2\sqrt{d+1}\epsilon$$

auf $\mathcal{N}_{>}^\epsilon$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\mathcal{N}_{>}^\epsilon} |J^\psi| d\sigma \\ & \leq \left(\frac{c_5}{\eta} + 1\right) \left(\frac{c_4\eta}{\epsilon}\right)^d \frac{c_3}{(c_4\eta - 2\epsilon)^{d+1}} 2(d+1)\epsilon^d (K^2(d+1)\epsilon^2 + \mu K^2\sqrt{d+1}\epsilon). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Aus (2.35) und (2.37) folgt, wenn wir zunächst $\epsilon \rightarrow 0$ und dann $\eta \rightarrow 0$ gehen lassen (oder wenn wir $\eta = \epsilon^\alpha$ wählen mit $0 < \alpha < 1/2$), unter Beachtung von (2.33) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{N}(\epsilon, \delta, r) = 0$. \square

2.5 Bemerkungen

Bemerkung 2.30 Wir haben gezeigt, daß die Menge von „schlechten“ Anfangswerten $\mathcal{B} := \{q_0 \in \mathcal{G}_0 : \tau(q_0) < \infty\}$ im Hinblick auf ihre Wahrscheinlichkeit vernachlässigbar ist: $\mathbf{P}(\mathcal{B}) = 0$. Insbesondere ist \mathcal{B} auch eine Lebesgue-Nullmenge in \mathcal{G}_0 . Ein topologischer Begriff von Vernachlässigbarkeit ist der der ersten Kategorie: Die Menge \mathcal{B} heißt von erster Kategorie in \mathcal{G}_0 , wenn sie in einer abzählbaren Vereinigung nirgends dichter Mengen in \mathcal{G}_0 enthalten ist. Das Komplement einer Menge von erster Kategorie wird oft „generisch“ oder „residual“ genannt ([RSI], S. 85f.). Im allgemeinen fallen der maßtheoretische und der topologische Begriff von Vernachlässigbarkeit auseinander: eine Menge vom Maß Null kann generisch sein. Für Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung folgt jedoch unmittelbar aus dem Satz über die stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten (vgl. auch [Saa]), daß die fast sichere globale Existenz die generische globale Existenz impliziert:

Lemma 2.31 $\mathbf{P}(\mathcal{B}) = 0 \implies \mathcal{B}$ ist von erster Kategorie in \mathcal{G}_0 .

Beweis Die Behauptung folgt aus $\mathcal{B} = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} \{q_0 \in \mathcal{G}_0 : \tau(q_0) \leq t\}$, denn die Mengen $\mathcal{B}_t := \{q_0 \in \mathcal{G}_0 : \tau(q_0) \leq t\} = \mathcal{G}_0 \setminus D_t^0$ sind abgeschlossen in \mathcal{G}_0 (vgl. Abschnitt 2.2.1) und nirgends dicht in \mathcal{G}_0 . (Wäre \mathcal{B}_t nicht nirgends dicht in \mathcal{G}_0 , so gäbe es eine offene Kugel $U_\epsilon \subset \mathcal{B}_t$. Weil aber die Dichte $|\psi_0|^2 > 0$ ist auf \mathcal{G}_0 , wäre $\mathbf{P}(\mathcal{B}_t) \geq \mathbf{P}(U_\epsilon) > 0$, im Widerspruch zu $\mathbf{P}(\mathcal{B}_t) \leq \mathbf{P}(\mathcal{B}) = 0$.) \square

Bemerkung 2.32 Weil jede Trajektorie in der Zusammenhangskomponente von \mathcal{G} bleibt, in der sie startet, impliziert unser Resultat die Erhaltung der $|\psi_t|^2$ -Wahrscheinlichkeit in jeder Zusammenhangskomponente von \mathcal{G} getrennt.

Bemerkung 2.33 Unter den Annahmen von Korollar 2.22 folgt, daß falls $\psi = 0$ auf dem Rand einer beschränkten offenen (nichtleeren) Teilmenge K der Konfigurationsraum-Zeit wäre (wobei ein Stück des Randes, das in einem einzigen t -Schnitt liegt, ausgenommen sein kann), dann müßte tatsächlich auch im Innern dieser Menge $\psi = 0$ sein. Dies kann aber, zumindest wenn V reell analytisch ist in Ω , tatsächlich gar nicht vorkommen, denn dann müßte ψ schon auf einem ganzen Streifen $\Omega(K) \times]t_1, t_2[$, wobei $\Omega(K)$ die Zusammenhangskomponente von Ω , in der K liegt, bezeichnet, gleich Null sein — wenn K eine Umgebung von $\{q\} \times]t_1, t_2[$ enthält, dann verschwindet ψ identisch auf $\Omega(K) \times]t_1, t_2[$ (vgl. [Rau], S. 98) — im Widerspruch zur Unitarität der Zeitentwicklung.

Bemerkung 2.34 Wir haben gezeigt, daß unter bestimmten Bedingungen an die Anfangswellenfunktion und den Hamiltonoperator Bohmsche Teilchenbahnen als Lösungen von (1.2) global für **P**-fast alle Anfangskonfigurationen existieren. In Beispiel 1.1 in der Einleitung haben wir bereits ein Beispiel dafür gegeben, daß dieses Resultat im allgemeinen (unter den Bedingungen von Satz 2.20 oder Korollar 2.22) nicht für *alle* Anfangskonfigurationen gelten kann. In dem gegebenen Beispiel ist jedoch die Dynamik eindeutig zu einer globalen Abbildung $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(q, t) \mapsto Q_t(q)$ fortsetzbar. Es gibt 3 stetige Trajektorien, die periodisch in Nullstellen der Wellenfunktion laufen, und alle anderen Trajektorien sind globale Lösungen von (1.2). Wie regulär ist eine auf diese Weise fortgesetzte Abbildung $Q_t(q)$ bei \mathcal{N} ? Es folgen zwei Beispiele zur (fehlenden) Regularität in q bei festem t und eines zur (fehlenden) Regularität in t bei festem q .

Beispiel 2.35 Man betrachte den harmonischen Oszillator in 3 Dimensionen (mit $\hbar = m = \omega = 1$) $H = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}(\rho^2 + z^2)$ und nehme den $(n = 0, l = 1)$ -Zustand $\psi(q, t) = \rho e^{-(\rho^2+z^2)/2} e^{i\varphi} e^{-5it/2}$ in Zylinderkoordinaten. Die Wellenfunktion hat Nullstellen bei $\rho = 0$, d.h. auf der z -Achse. Die Teilchen kreisen um die z -Achse mit Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho_0^2}$, $Q_t(\rho_0, \varphi_0, z_0) = (\rho_0, \varphi_0 + \frac{t}{\rho_0^2}, z_0)$ für $\rho_0 > 0$. Die Abbildung Q kann zu einer stetigen Abbildung fortgesetzt werden, die jedoch bei $\rho = 0$ nicht nach den Ortskoordinaten differenzierbar ist, indem man definiert $Q_t(\rho_0 = 0, \varphi_0, z_0) = (0, \varphi_0, z_0)$ für alle t .

Beispiel 2.36 Man kann sogar ein Beispiel angeben, für das die fortgesetzte Abbildung nicht stetig in q bei festem t ist: Man betrachte freie Bewegung in einer Dimension mit einer Anfangswellenfunktion ψ_0 , die eine gerade, (reelle,

positive) und unendlich oft differenzierbare Funktion von q ist, und deren Träger in $[-b, -a] \cup [a, b]$ mit $0 < a < b < \infty$ liegt. $\psi_0 \in C^\infty(H_0)$, und ψ_t ist eine gerade Funktion von q für alle t . Deshalb ist das Geschwindigkeitsfeld eine ungerade Funktion von q , und $Q_t(0) = 0$ für alle t ist eine mögliche Trajektorie. Es gibt eine Zeit t_1 mit $\psi_{t_1}(0) \neq 0$. Wenn man diese Zeit als Anfangszeit wählt, ist die Abbildung Q unstetig in q für $t = -t_1$, vgl. Abbildung 2.3. (Dies gilt für *jede* Fortsetzung der Dynamik!)

Beispiel 2.37 Zur Untersuchung der Regularität in t bei festem q , d.h. der Regularität der Trajektorien, untersuchen wir das Beispiel 1.1 mit der Wellenfunktion (1.8) noch einmal genauer. Wenn man eine Bahn analysiert, die durch den Knoten bei $q = 1, t = 0$ läuft, findet man, daß sie lokal die Form hat $Q_t(1) = (3t^2/4)^{1/3} + 1$, d.h. sie ist nicht differenzierbar bei $t = 0$, vgl. Abbildung 2.4. Dies kann beispielsweise am Fluß durch $q = 1, t = 0$ oder, auf dasselbe hinauslaufend, an der Definition (3.1) (vgl. Abschnitt 3) für die Trajektorien als Höhenlinien der Funktion $F(q, t) = \int_{-\infty}^q |\psi_t|^2 dx$ abgelesen werden. Dieses Verhalten von Trajektorien, die in einer Dimension durch eine Nullstelle bei (q^*, t^*) laufen, ist in der Tat typisch. Denn wenn $\psi(q, t^*) \sim \alpha x^k$ mit $k \geq 1$ und $x = q - q^*$, dann ist $F(q, t^*) \sim F(q^*, t^*) + ax^{2k+1}$, $a = |\alpha|^2/(2k+1)$, und $\frac{\partial F}{\partial t}(q, t^*) = -j^{\psi_{t^*}}(q) \sim bx^{2k}$. Deshalb ist $F(q, t) \sim F(q^*, t^*) + ax^{2k+1} + bx^{2k}s + cs^2$ mit $s = t - t^*$ in der Umgebung der Nullstelle der Wellenfunktion. Die Höhenlinie $F(q, t) = F(q^*, t^*)$ hat für $c \neq 0$ folglich lokal die Form $x \sim (-cs^2/a)^{1/(2k+1)}$.

Bemerkung 2.38 Die Wahrscheinlichkeit, die Nullstellen der Wellenfunktion zu erreichen,

$$\mathbf{P}(\{q \in \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r} : X^{\epsilon\delta r T} \in \partial\mathcal{N}^\epsilon \cap \mathcal{G}_{[0, T]}^{\delta r}\}) \text{ mit } X^{\epsilon\delta r T} = (Q_{\min(\tau^{\epsilon\delta r}, T)}, \min(\tau^{\epsilon\delta r}, T)),$$

kann auch auf eine andere Art abgeschätzt werden, in die das Flußintegralargument aus Abschnitt 2.3.2 nicht eingeht. Die Voraussetzungen dieses Lemmas verglichen mit dem entsprechenden Lemma 2.29 sind stärker, aber das Resultat ist ebenfalls stärker, denn die Konvergenz der Wahrscheinlichkeit, die Nullstellen der Wellenfunktion zu erreichen, gegen 0 im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ ist gleichmäßig in δ und r .

Lemma 2.39 *Es gelte A1–A4. Dann gilt gleichmäßig in δ und r für alle $T > 0$*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}(\{q \in \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r} : X^{\epsilon\delta r T} \in \partial\mathcal{N}^\epsilon \cap \mathcal{G}_{[0, T]}^{\delta r}\}) = 0.$$

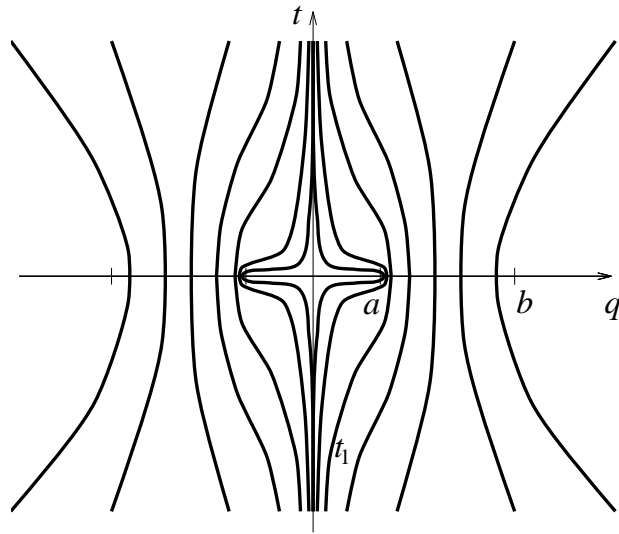


Abbildung 2.3 Skizze des Verlaufs der Bohmschen Bahnen in einer Dimension für die in Beispiel 2.36 betrachtete Wellenfunktion.

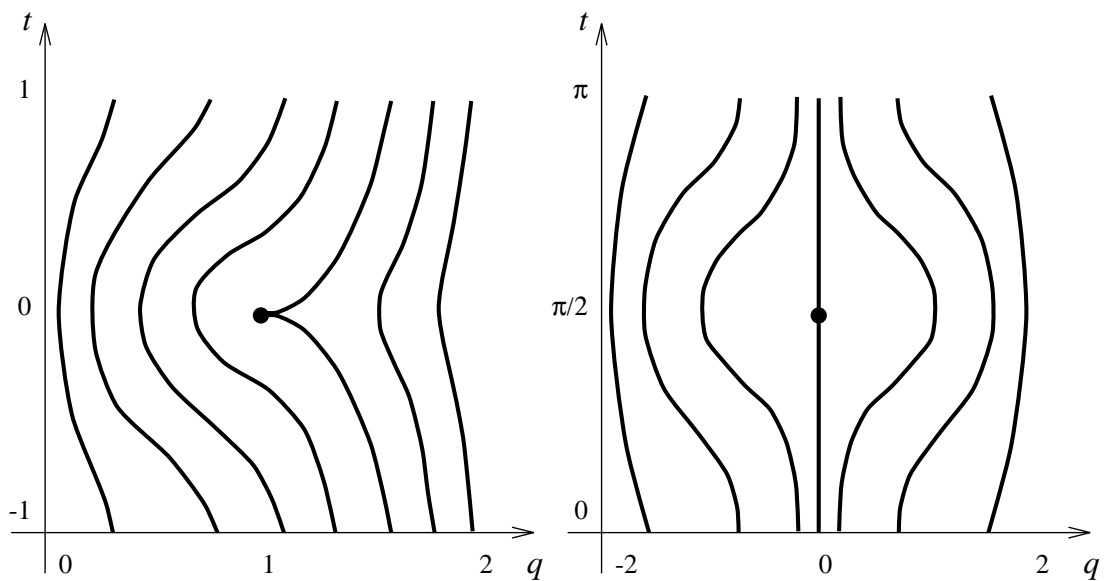


Abbildung 2.4 Skizze des Verlaufs der Bohmschen Bahnen — der Höhenlinien von F — für die in Beispiel 2.37 betrachtete Wellenfunktion. Links ist auf die Umgebung einer Nullstelle bei $q = 1, t = 0$, rechts auf die einer Nullstelle bei $q = 0, t = \pi/2$ fokussiert.

Für den Beweis dieses Lemmas wählen wir für $\epsilon > 0$

$$\mathcal{N}^\epsilon := \{(q, t) \in \Omega \times \mathbb{R} : |\psi_t(q)| \leq \epsilon\}. \quad (2.38)$$

(Man beachte, daß diese Menge nicht notwendig eine glatte Oberfläche hat!) Satz 2.20 kann auch mit diesem Lemma anstelle von Lemma 2.29 bewiesen werden. Der entsprechende Teil von Lemma 2.26 folgt ebenfalls aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz. In (2.30) wird natürlich der Term $\mathbf{P}(X^{\epsilon\delta r T} \in \partial\mathcal{N}^\epsilon \cap \mathcal{G}_{[0,T]}^{\delta r})$ nicht durch das Flußintegral $\mathbf{N}(\epsilon, \delta, r)$ ersetzt. Die Reihenfolge der Limesbildung spielt dann keine Rolle.

Der Beweis von Lemma 2.39 ist analog zu dem Beweis von Nelson für das vergleichbare Problem in stochastischer Mechanik ([Nel85], §15): Man sucht eine Funktion auf dem Konfigurationsraum, die unendlich wird, wenn die Trajektorie in eine Nullstelle der Wellenfunktion läuft, und für die man eine a-priori-Schranke hat, die es gestattet, die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis zu kontrollieren. Die Funktion, die sich hierfür anbietet, ist $\log |\psi|$, die „Entropie“.

Beweis von Lemma 2.39 Wir stellen zunächst die formale Abschätzung dar, ohne auf das Problem einzugehen, daß die Lösungskurve $Q_t(q)$, die bei q beginnt, möglicherweise nicht für alle Zeiten existiert. Aus A1–A3 folgt mit Satz 2.2, daß $\psi \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ ist. \mathbf{E} bezeichne den Erwartungswert bezüglich des Maßes \mathbf{P} . Wir berechnen für beliebige $T > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\left|\log |\psi_T(Q_T)| - \log |\psi_0|\right|\right) &= \mathbf{E}\left(\left|\int_0^T \frac{d}{dt} \log |\psi_t(Q_t)| dt\right|\right) = \\ \mathbf{E}\left(\left|\int_0^T \left(\frac{1}{2} \frac{1}{|\psi_t(Q_t)|^2} \frac{\partial |\psi_t(Q_t)|^2}{\partial t} + \frac{\nabla |\psi_t(Q_t)|}{|\psi_t(Q_t)|} \cdot v^{\psi_t(Q_t)}\right) dt\right|\right) &\leq \\ \int_0^T \mathbf{E}\left(\frac{1}{2} \frac{1}{|\psi_t(Q_t)|^2} \left|\frac{\partial |\psi_t(Q_t)|^2}{\partial t}\right|\right) dt + \int_0^T \mathbf{E}\left(\mu \frac{|\nabla \psi_t(Q_t)|^2}{|\psi_t(Q_t)|^2}\right) dt, \end{aligned} \quad (2.39)$$

wobei in den letzten Term die Schranken

$$\nabla |\psi| \leq |\nabla \psi| \quad \text{und} \quad |v^\psi| \leq \mu \left| \frac{\nabla \psi}{\psi} \right| \quad (2.40)$$

eingegangen sind. Wegen der Äquivarianz von $|\psi|^2$ (2.15) gilt $\mathbf{E}(f_t(Q_t)) = \int_\Omega |\psi_t(q)|^2 f_t(q) dq$. Wir erhalten für die rechte Seite von (2.39)

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{1}{2} \left| \frac{\partial |\psi_t(q)|^2}{\partial t} \right| dq dt + \mu \int_0^T \int_\Omega |\nabla \psi_t(q)|^2 dq dt. \quad (2.41)$$

Wir ersetzen $\left| \frac{\partial |\psi_t(q)|^2}{\partial t} \right|$ durch $\frac{1}{\hbar} \left| \psi_t^*(q) H \psi_t(q) - \psi_t(q) H \psi_t^*(q) \right|$. Wegen der Schwarzischen Ungleichung ist der erste Term von (2.41) beschränkt durch

$$\frac{1}{\hbar} \int_0^T \|\psi_t\| \|H\psi_t\| dt = \frac{T}{\hbar} \|H\psi_0\| < \infty,$$

und der zweite Term ist beschränkt für jedes $T < \infty$ aufgrund von Annahme A4.

Nun müssen wir lediglich den Prozeß noch rechtzeitig abbrechen. Für $t \geq 0$ sei $Q_t^{\epsilon\delta r} : \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r} \cup \{\dagger\} \rightarrow \mathcal{G}_t^{\epsilon\delta r} \cup \{\dagger\}$ definiert durch

$$Q_t^{\epsilon\delta r}(q) := \begin{cases} Q_t(q) & \text{für } t \leq \tau^{\epsilon\delta r}(q) \\ \dagger & \text{für } t > \tau^{\epsilon\delta r}(q). \end{cases} \quad (2.42)$$

Zur Vollständigkeit setzen wir $Q_t^{\epsilon\delta r}(\dagger) = \dagger$ für alle $t \geq 0$. Wir betrachten nun das Wahrscheinlichkeitsmaß $P_0^{\epsilon\delta r}$ auf $\mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r} \cup \{\dagger\}$ mit der Dichte

$$\rho_0^{\epsilon\delta r}(q) := |\psi_0(q)|^2 \quad \text{für } q \in \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r}$$

(und natürlich $P_0^{\epsilon\delta r}(\dagger) = 1 - \int_{\mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r}} \rho_0^{\epsilon\delta r}(q) dq$). Das Bildmaß des Prozesses $Q_t^{\epsilon\delta r}$ bezeichnen wir mit $P_t^{\epsilon\delta r} := P_0^{\epsilon\delta r} \circ (Q_t^{\epsilon\delta r})^{-1}$. Man zeigt wie in Abschnitt 2.2.2, daß es die Dichte

$$\rho_t^{\epsilon\delta r} = |\psi_t|^2 \quad \text{auf } Q_t^{\epsilon\delta r}(\mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r}) \cap \mathcal{G}_t^{\epsilon\delta r} \quad (2.43)$$

hat. Aus der Definition von \mathcal{N}^ϵ (2.38) folgt

$$\{q \in \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r} : X^{\epsilon\delta r T} \in \partial\mathcal{N}^\epsilon \cap \mathcal{G}_{[0,T]}^{\delta r}\} = \{q \in \mathcal{G}_0^{\epsilon\delta r} : |\psi(X^{\epsilon\delta r T})| = \epsilon\}.$$

Weil wir δ und r festhalten werden und die Abschätzungen unabhängig von δ und r sind, werden wir auf die Indizes δ und r an $Q_t^{\epsilon\delta r}$, $\mathcal{G}^{\epsilon\delta r}$ und $\rho^{\epsilon\delta r}$ verzichten. Wir betrachten nun für $q \in \mathcal{G}_0^\epsilon$ und $t \geq 0$

$$D_t^\epsilon(q) := \log |\psi_{\min(\tau^\epsilon(q), t)}(Q_{\min(\tau^\epsilon(q), t)}(q))| - \log |\psi_0(q)|$$

und $D_t^\epsilon(\dagger) := 0$. Damit ist mit $K(\epsilon) := -\log \epsilon$

$$\begin{aligned} \{q \in \mathcal{G}_0^\epsilon : |\psi(X^{\epsilon\delta r T})| = \epsilon\} &\subset \{q \in \mathcal{G}_0^\epsilon : |\log |\psi(X^{\epsilon\delta r T})|| \geq K(\epsilon)\} \\ &\subset \{q \in \mathcal{G}_0^\epsilon : |D_T^\epsilon| + |\log |\psi_0|| \geq K(\epsilon)\} \\ &\subset \{q \in \mathcal{G}_0^\epsilon : |D_T^\epsilon| \geq K(\epsilon)/2\} \cup \{q \in \mathcal{G}_0^\epsilon : |\log |\psi_0|| \geq K(\epsilon)/2\}. \end{aligned}$$

Wir werden zeigen, daß gleichmäßig in ϵ

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\{q \in \mathcal{G}_0^\epsilon : |D_T^\epsilon(q)| > K\}) = 0. \quad (2.44)$$

Dann folgt die Behauptung, denn es gilt auch

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\{q \in \mathcal{G}_0^\epsilon : |\log |\psi_0(q)|| > K\}) = 0$$

gleichmäßig in ϵ (mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz). Es ist

$$D_T^\epsilon(q) = \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} D_t^\epsilon(q) dt = \int_0^T f_t \circ Q_t^\epsilon(q) dt$$

mit

$$f_t(y) := \begin{cases} 0 & \text{für } y = \dagger \\ \frac{1}{2} \frac{1}{|\psi_t(y)|^2} \frac{\partial |\psi_t(y)|^2}{\partial t} + \frac{|\nabla |\psi_t(y)||}{|\psi_t(y)|} \cdot v^{\psi_t}(y) & \text{für } y \in \mathcal{G}_t^\epsilon. \end{cases}$$

Aus der Markovschen Ungleichung erhalten wir

$$\mathbf{P}(\{q \in \mathcal{G}_0^\epsilon : |D_T^\epsilon(q)| > K\}) \leq \frac{1}{K} \mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\mathcal{G}_0^\epsilon} \left| \int_0^T f_t \circ Q_t^\epsilon dt \right| \right). \quad (2.45)$$

Man beachte nun, daß $\mathbf{P} = P_0^\epsilon$ auf \mathcal{G}_0^ϵ , und daß $D_T^\epsilon = 0$ und $f_t = 0$ in \dagger . Dann folgt aus der Definition von ρ_t^ϵ als Bildichte von Q_t^ϵ auf \mathcal{G}_t^ϵ , daß die rechte Seite von (2.45) beschränkt ist durch

$$\frac{1}{K} \int_0^T \int_{\mathcal{G}_t^\epsilon} \rho_t^\epsilon(q) |f_t(q)| dq dt.$$

Wegen (2.43), der Abschätzung (2.40) (die auf \mathcal{G}_t^ϵ gilt!) und der Positivität des Integranden erhalten wir schließlich

$$\mathbf{P}(\{q \in \mathcal{G}_0^\epsilon : |D_T^\epsilon(q)| > K\}) \leq \frac{1}{K} \left(\int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left| \frac{\partial |\psi_t(q)|^2}{\partial t} \right| dq dt + \mu \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \psi_t(q)|^2 dq dt \right). \quad (2.46)$$

Die Klammer auf der rechten Seite ist (2.41). Aufgrund von Annahme A4 ist (2.41) endlich, und folglich geht die rechte Seite von (2.46) gegen Null mit $K \rightarrow \infty$ gleichmäßig in ϵ , δ und r . Damit ist Lemma 2.39 bewiesen. \square

Kapitel 3

Globale Existenz der Teilchenbahnen und Selbstadjungiertheit des Hamiltonoperators

3.1 Ein Existenzsatz für Bohrsche Mechanik in einer Dimension

In Korollar 2.22 wurde die (fast sichere) globale Existenz von Lösungen der Bohrschen Mechanik gezeigt unter der Bedingung, daß der Hamiltonoperator die *Formsomme* $H_0 + V$ ist, und unter Bedingungen an das Potential V , die insbesondere dazu führen, daß die betrachteten Hamiltonoperatoren nach unten beschränkt sind. Damit sind zwar, vgl. Bemerkung 2.24, die physikalisch interessantesten Fälle abgedeckt, aber diese Bedingungen sind sicherlich nicht notwendig, vgl. Bemerkung 2.25. Für den Fall eines Teilchens, das sich auf der Halbgeraden $\Omega = (0, \infty)$ bewegt, beweisen wir — für eine gewisse Klasse von Potentialen — die (fast sichere) globale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Bohrschen Gleichung (1.2) für *beliebige selbstadjungierte Erweiterungen* von H_{\min} (2.2), die nach unten unbeschränkt sein können.

Satz 3.1 *Es sei $\Omega = (0, \infty)$, $V \in C^\infty(\Omega)$, und $H_0 + V$ sei im Grenzpunktfall bei Unendlich. Es gelte A2 und A3. Dann ist $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 0$.*

Für Potentiale, für die es $k, c \geq 0$ gibt, so daß $V(r) \geq -kr^2$ für $r > c$ gilt, ist $H_0 + V$ im Grenzpunktfall bei Unendlich (siehe z.B. [RSII], Thm. X.8).

Beispiel 3.2 Für das Potential $V(q) = -\frac{c}{q^2}$ mit $c > 0$ groß genug ist der Hamiltonoperator $H = H_0 + V$ nach unten (und oben) unbeschränkt, im Grenzkreisfall bei 0 und im Grenzpunktfall bei Unendlich (siehe z.B. [RSII], Anhang zu Abschnitt X.1). Folglich gibt es eine Ein-Parameter-Familie von (unbeschränkten) selbstadjungierten Erweiterungen von H_{\min} . Für alle diese Hamiltonoperatoren existieren globale Lösungen der Bohrschen Mechanik für **P**-fast alle Anfangsorte.

Wir führen den Beweis von Satz 3.1 mithilfe einer anderen Definition für die Teilchenbewegung in einer (Raum-)Dimension, $\Omega = (a, b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. $Q_t(q_0)$ sei implizit definiert durch

$$\int_a^{Q_t(q_0)} |\psi_t(x)|^2 dx = \int_a^{q_0} |\psi_0(x)|^2 dx.$$

$Q_t(q_0)$ ist wohldefiniert, falls

$$F(q, t) := \int_a^q |\psi_t(x)|^2 dx$$

streng monoton in q ist. Dies ist nur an solchen Punkten nicht der Fall, an denen in einer ganzen Umgebung $\psi_t = 0$ ist. Um $Q_t(q_0)$ für $q_0 \in \Omega$ global zu definieren, setzen wir (willkürlich)

$$Q_t(q_0) := \min\{q \in \Omega : F(q, t) = F(q_0, 0)\} \quad (3.1)$$

und $Q_t(q_0) = a$ falls $F(q_0, 0) = 0$, $Q_t(q_0) = b$ falls $F(q_0, 0) = 1$ ist.

Beweis von Satz 3.1 Aus Satz 2.2 folgt, daß $\psi \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ ist. Hieraus, und aus der Stetigkeit des Skalarproduktes und L^2 -Differenzierbarkeit der Abbildung $t \mapsto \psi_t$ folgt, daß

$$F(q, t) = \int_0^q |\psi_t|^2 dx = (\mathbb{1}_{[0, q]} \psi_t, \psi_t)$$

stetig differenzierbar nach (q, t) ist. Es gilt $\frac{\partial F}{\partial q} = |\psi_t(q)|^2$ und

$$\frac{\partial F(q, t)}{\partial t} = \int_0^q \frac{\partial |\psi_t(x)|^2}{\partial t} dx = -j^{\psi_t}(q) + \lim_{x \rightarrow 0} j^{\psi_t}(x) = -j^{\psi_t}(q).$$

Die letzte Gleichheit gilt, weil $\lim_{x \rightarrow \infty} j^{\psi_t}(x) = 0$ und folglich auch $\lim_{x \rightarrow 0} j^{\psi_t}(x) = 0$ ist aufgrund der Voraussetzung, daß H im Grenzpunktfall im Unendlichen ist (siehe z.B. [Wei], Abschnitt 8.4).

Für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $q_0 \in \mathcal{G}_0 = \Omega \setminus \mathcal{N}_0$ sei $Q_t(q_0)$ definiert durch (3.1), also als Höhenlinie von F . Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, daß die Abbildung $t \mapsto Q_t(q_0)$ stetig differenzierbar ist für (q_0, t) mit $\psi_t(Q_t(q_0)) \neq 0$, und daß $\frac{dQ_t}{dt} = \frac{j^{\psi_t}(Q_t)}{|\psi_t(Q_t)|^2} = v^{\psi_t}(Q_t)$ ist; d.h. Q_t löst die Differentialgleichung (1.2) auf $\mathcal{G} = (\Omega \times \mathbb{R}) \setminus \mathcal{N}$. (3.1) stellt also eine Erweiterung (die sogar für alle $\psi \in L^2$ möglich ist!) der Definition der Bohmschen Bahnen durch Gleichung (1.2) dar.

Man sieht der Definition (3.1) unmittelbar an, daß $Q_t(q_0) \in \Omega$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $q_0 \in \mathcal{G}_0$ ist; denn für $q_0 \in \mathcal{G}_0$ gilt $0 < F(q_0, 0) < 1$, und F ist stetig mit $F(0, t) = 0$ und $\lim_{q \rightarrow \infty} F(q, t) = 1$ für alle t . Die Trajektorien laufen also nicht in die (einzige) mögliche Singularität des Potentials $\mathcal{S} = \{0\}$ oder nach Unendlich in endlicher Zeit. Nun muß nur noch gezeigt werden, daß für \mathbf{P} -fast alle Anfangswerte q_0 $\tau(q_0) = \sup\{s > 0 : Q_t(q_0) \in \mathcal{G} \text{ für alle } t \leq s\}$ unendlich ist, d.h. daß (1.2) globale Lösungen für fast alle Anfangswerte hat. Wir gehen ähnlich wie im Beweis von Satz 2.20 vor: Wir betrachten die ϵ -Umgebung \mathcal{N}^ϵ (2.29) und setzen $\mathcal{G}^\epsilon := (\Omega \times \mathbb{R}) \setminus \mathcal{N}^\epsilon$ und $\mathcal{G}_0^\epsilon = \Omega \setminus \mathcal{N}_0^\epsilon$. Wir definieren für $q_0 \in \mathcal{G}_0^\epsilon$ die Stopzeit

$$\tau^\epsilon(q_0) := \sup\{s > 0 : (Q_t(q_0), t) \in \mathcal{G}^\epsilon \text{ für alle } t \leq s\}.$$

Ähnlich wie in Korollar 2.11 zeigt man, daß

$$\forall q_0 \in \mathcal{G}_0^\epsilon : \tau(q_0) < \infty \implies \tau^\epsilon(q_0) < \tau(q_0) \text{ und } (Q_{\tau^\epsilon(q_0)}, \tau^\epsilon(q_0)) \in \partial\mathcal{G}^\epsilon.$$

Wir skizzieren das Argument: Unendlich kann kein Grenzpunkt von Q_t sein, wenn $\tau < \infty$ ist, denn wegen der L^2 -Stetigkeit von $t \mapsto \psi_t$ geht $F(q_k, t_k)$ längs einer Folge ($q_k \rightarrow \infty, t_k \rightarrow \tau^\epsilon$) nach 1. Deshalb ist $L^\epsilon \neq \emptyset$. Analog sieht man, daß längs einer Folge ($q_k \rightarrow 0, t_k \rightarrow \tau^\epsilon$) $F(q_k, t_k) \rightarrow 0$ geht, folglich ist 0 ebenfalls kein Grenzpunkt von Q_t . Es gilt also $\tau^\epsilon < \tau$. Die Stetigkeit von Q_t für $t < \tau$ impliziert $(Q_{\tau^\epsilon}, \tau^\epsilon) \in \partial\mathcal{G}^\epsilon$.

Es seien nun $0 < T, r < \infty$. Wir setzen $\overline{M}_r := \min_{0 \leq t \leq T} F(r, t)$ und $\underline{M}_r := \max_{0 \leq t \leq T} F(1/r, t)$. Wir wählen \overline{q}_0^r so daß $F(\overline{q}_0^r, 0) = \overline{M}_r$ ist und \underline{q}_0^r so daß $F(\underline{q}_0^r, 0) = \underline{M}_r$ ist. Wir setzen $\mathcal{G}_0^{\epsilon r} := \mathcal{G}_0^\epsilon \cap (q_0^r, \overline{q}_0^r)$ (vergleiche Abbildung 3.1). Es gilt

$$\{q_0 \in \mathcal{G}_0 : \tau(q_0) < T\} \subset (\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{G}_0^{\epsilon r}) \cup \{q_0 \in \mathcal{G}_0^{\epsilon r} : \tau^\epsilon(q_0) < T\}, \quad (3.2)$$

und deshalb ist

$$\mathbf{P}(\{q_0 \in \mathcal{G}_0 : \tau(q_0) < T\}) \leq \mathbf{P}(\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{G}_0^{\epsilon r}) + \mathbf{P}(\{q_0 \in \mathcal{G}_0^{\epsilon r} : \tau^\epsilon(q_0) < T\}). \quad (3.3)$$

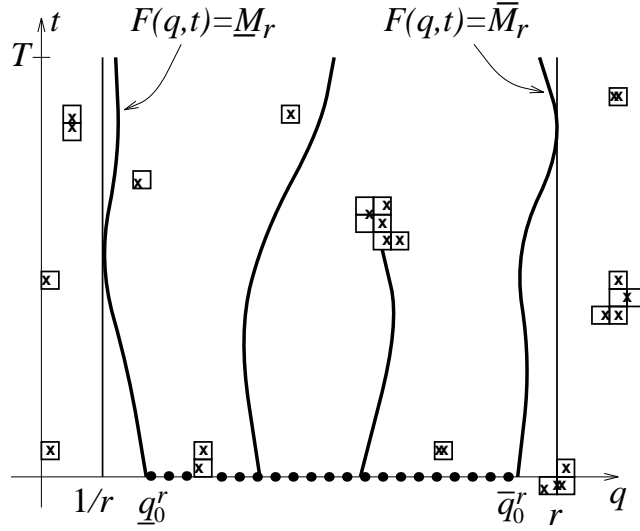


Abbildung 3.1 Die Menge \mathcal{G}_0^{er} ist durch die gepunktete Linie gekennzeichnet. Die Bahnen, die in \mathcal{G}_0^{er} starten, bleiben im Kompaktum $[1/r, r]$ für $0 \leq t \leq T$. Die Bahn, die bei q_0^r startet — die Höhenlinie von $F = \underline{M}_r$ — bildet den linken Abschluß der in \mathcal{G}_0^{er} startenden Bahnen; entsprechendes gilt für die Bahn, die bei \bar{q}_0^r startet. Die Nullstellen der Wellenfunktion sind durch \times gekennzeichnet, sie sind jeweils von ϵ -Würfeln umgeben. Es sind noch zwei weitere Bahnen eingezeichnet, von denen eine bei $\tau^\epsilon < T$ an einem Würfel von \mathcal{N}^ϵ endet.

Um den ersten Term auf der rechten Seite von (3.3) zu beschränken, betrachten wir

$$\mathbf{P}(\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{G}_0^{er}) \leq \mathbf{P}(\mathcal{N}_0^\epsilon) + \mathbf{P}((\bar{q}_0^r, \infty)) + \mathbf{P}((0, q_0^r)).$$

Diese 3 Terme verschwinden im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ bzw. $r \rightarrow \infty$.

Für alle $q_0 \in \mathcal{G}_0^{er}$ bleibt die Trajektorie Q_t für $0 \leq t \leq T$ in dem Kompaktum $[1/r, r]$. Wie in Abschnitt 2.3 gilt daher mit

$$X^{\epsilon T}(q_0) := (Q_{\min(\tau^\epsilon(q_0), T)}(q_0), \min(\tau^\epsilon(q_0), T))$$

für den zweiten Term auf der rechten Seite von (3.2)

$$\begin{aligned} \{q_0 \in \mathcal{G}_0^{er} : \tau^\epsilon(q_0) < T\} &\subset \{q_0 \in \mathcal{G}_0^{er} : X^{\epsilon T} \in \partial \mathcal{G}^\epsilon \cap ([1/r, r] \times [0, T])\} \\ &= \{q_0 \in \mathcal{G}_0^{er} : X^{\epsilon T} \in \partial \mathcal{N}^\epsilon \cap ([1/r, r] \times [0, T])\} \end{aligned}$$

und damit

$$\mathbf{P}(\{q_0 \in \mathcal{G}_0^{er} : \tau^\epsilon(q_0) < T\}) \leq \int_{\partial \mathcal{N}^\epsilon \cap ([1/r, r] \times [0, T])} |J^\psi \cdot U| d\sigma = \mathbf{N}(\epsilon, \delta = \frac{1}{r}, r).$$

Lemma 2.29 (wobei $\mathcal{G}_{[0,T]}^{\delta r} = [1/r, r] \times [0, T]$ zu setzen ist) impliziert, daß für alle $0 < T, r < \infty$ der zweite Term auf der rechten Seite von (3.3) gegen 0 geht mit $\epsilon \rightarrow 0$. Satz 3.1 ist folglich bewiesen, indem der Limes $r \rightarrow \infty$ nach dem Limes $\epsilon \rightarrow 0$ genommen wird. \square

Bemerkung 3.3 Für die in diesem Satz 3.1 betrachtete Klasse von Potentialen sind die Defektindizes des minimalen Hamiltonoperators gleich 1. Folglich sind alle selbstadjungierten Erweiterungen reell (vgl. [RSII], S. 349), und damit folgt die globale Existenz der Bohmschen Trajektorien auch in die negative Zeitrichtung gemäß Bemerkung 2.8.

3.2 Bemerkungen

3.4 Nun stellt sich die Frage, ob vielleicht für *jeden* selbstadjungierten Schrödingeroperator Lösungen der Bohmschen Gleichung (1.2) global existieren. Dies ist falsch, wie man beispielsweise an der freien (d.h. $V = 0$) Bewegung eines Teilchens im Intervall $\Omega = (0, 1)$ sehen kann. Es gibt zu H_{\min} eine 4-Parameter-Familie von selbstadjungierten Erweiterungen, darunter solche, für die der Fluß in die Randpunkte nicht verschwindet, $j(0) = j(1) \neq 0$. (Auch Potentiale auf $\Omega = (0, \infty)$, für die $H_0 + V$ im Grenzkreisfall bei Unendlich ist, können als Beispiel dienen.) Der ein- bzw. auslaufende Fluß von Teilchen bei 0 wird durch einen gleichgroßen aus- bzw. einlaufenden Fluß bei 1 kompensiert. Damit bleibt die Gesamtwahrscheinlichkeit $\|\psi_t\|$ erhalten. (Natürlich kann dieses Verhalten als Bewegung auf einem Kreis mit einem ausgezeichneten Punkt interpretiert werden.) Im allgemeinen erreichen viele Teilchen den Rand von Ω , so daß fast sichere globale Existenz im Sinne von Lösungen der Differentialgleichung (1.2) nicht erfüllt ist. Die Bewegung ist jedoch in offensichtlicher Weise fortsetzbar, so daß die Trajektorien stückweise Lösungen der Differentialgleichung sind, bis sie einen Randpunkt von Ω erreichen. Die Bewegung wird dann vom anderen Randpunkt aus fortgesetzt. $|\psi|^2$ ist eine äquivariante Dichte für diese Dynamik. Analog zu (3.1) kann die Dynamik folgendermaßen beschrieben werden:

$$Q_t(q_0) := \min\{q : \tilde{F}(q, t) = \tilde{F}(q_0, 0)\}$$

mit

$$\tilde{F}(q, t) = \left(F(q, t) - \int_0^t j_s(0) ds \right) \bmod 1.$$

Eine andere Möglichkeit, eine globale Dynamik für diesen Fall zu erhalten, besteht in der unmodifizierten Darstellung (3.1). In diesem Fall springen die Teilchen nicht von 1 nach 0 oder von 0 nach 1. Dies ist gleichzeitig ein Beispiel dafür, daß eine deterministische Dynamik, die völlig verschieden ist von der Bohmschen — (1.1) wird ersetzt durch $v^{\psi_t}(q) = \frac{j^{\psi_t}(q) - j^{\psi_t}(0)}{|\psi_t(q)|^2}$ — ebenfalls $|\psi|^2$ als äquivalente Dichte haben kann. (Wir erwarten jedoch, daß dann im allgemeinen die Wahrscheinlichkeit, die Nullstellen der Wellenfunktion zu erreichen, nicht mehr 0 sein wird. Jedenfalls ist der Beweis von Lemma 2.29 nicht übertragbar.)

Man vermutet jedoch, daß Selbstadjungiertheit die (möglicherweise unstetige) Fortsetzbarkeit von Lösungen der Bohmschen Gleichung (1.2) impliziert, so daß $|\psi|^2$ eine äquivalente Dichte ist. Denn die Symmetrie des Hamiltonoperators führt auf

$$\lim_{\delta \rightarrow 0, r \rightarrow \infty} \left(\int_{\partial \mathcal{S}^\delta \cap \mathcal{K}^r} (j^{\psi_t}(q) \cdot u) ds + \int_{\partial \mathcal{K}^r \setminus \mathcal{S}^\delta} (j^{\psi_t}(q) \cdot u) ds \right) = 0$$

mittels partieller Integration (Greensche Formel)

$$\int_M \psi^* (H\psi) dq - \int_M (H\psi^*) \psi dq = -i\hbar \int_{\partial M} (j^\psi \cdot u) ds \quad (3.4)$$

für $M = \mathcal{K}^r \setminus \mathcal{S}^\delta$. Das Verschwinden der Integrale über den *absoluten* Fluß impliziert globale Existenz von Lösungen der Bohmschen Mechanik: in endlicher Zeit werden die Singularitäten des Geschwindigkeitsfeldes und Unendlich nicht erreicht. Das Gleichgewicht der ein- und auslaufenden Flüsse bei Selbstadjungiertheit des Hamiltonoperators suggeriert Fortsetzbarkeit der Dynamik: manche der Singularitäten bzw. Unendlich sind Quellen, andere sind Senken.

3.5 Wenn wir einen Schrödingeroperator H auf einem Definitionsbereich betrachten, auf dem er nicht (wesentlich) selbstadjungiert ist, d.h. wo nicht genügend oder keine adäquaten Randbedingungen gestellt werden, dann ist zunächst die Zeitentwicklung der Wellenfunktion nicht eindeutig: Es gibt unendlich viele verschiedene unitäre Entwicklungen (die von verschiedenen selbstadjungierten Erweiterungen induziert werden), und zusätzlich gibt es Halbgruppen, für die $\|\psi_t\|$ nicht erhalten bleibt.

Zweitens, (wesentliche) Selbstadjungiertheit ist äquivalent zu $\text{Ker}(H^* \pm i) = \{0\}$, d.h. wenn H auf einem Definitionsbereich betrachtet wird, wo er symmetrisch, aber nicht selbstadjungiert ist, hat H^* imaginäre Eigenwerte. Zusammen mit der

(räumlichen) Regularität von Eigenfunktionen des elliptischen Operators H^* (bei genügend regulärem Potential V) erhalten wir klassische Lösungen der Schrödingergleichung mit exponentiell fallender oder steigender Norm. Weil $\rho = |\psi|^2$ nach wie vor auf \mathcal{I} gilt (vgl. Korollar 2.7), führen diese mit positiver Wahrscheinlichkeit auf „Katastrophen“.

Dieses Problem ist nicht weithergeholt: Wie bereits erwähnt, ist der Hamiltonoperator für ein Teilchen in einem Coulombfeld nicht wesentlich selbstadjungiert auf dem „natürlichen“ Definitionsbereich $C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$. Folglich ist die Zeitentwicklung von Wellenfunktionen nicht eindeutig definiert, und, schwerwiegender noch, es gibt klassische Lösungen der Schrödingergleichung, für die die Bohmschen Teilchen typischerweise in die Singularität des Potentials laufen! Wenn wir verlangen, daß Bohmsche Teilchenbahnen als Lösungen von (1.2) global existieren, kommen natürlich nur selbstadjungierte Erweiterungen in Frage. Es gibt mehrere Eigenschaften, die unter allen möglichen Erweiterungen diejenige auszeichnen, die üblicherweise als „der Coulomb-Hamiltonian“ betrachtet wird — der ja das experimentell beobachtete Spektrum hat. Wir kennen jedoch kein überzeugendes physikalisches *a-priori*-Argument, wenn man nicht beispielsweise „den Coulomb-Hamiltonian“ als kleine Störung des freien Hamiltonoperators ansehen will [Kato51] oder annimmt, daß „in Wirklichkeit“ die Singularität geglättet ist. Auch die Forderung nach globaler Existenz von Teilchenbahnen als Lösungen der Bohmschen Gleichung scheint keine selbstadjungierte Erweiterung auszuzeichnen: Unser Satz 2.20 und Korollar 2.22 gilt zwar nur für die Formsumme — das ist „der Coulomb-Hamiltonian“ — aber wir erwarten, daß Lösungen der Bohmschen Mechanik auch für die anderen selbstadjungierten Erweiterungen global existieren.¹

¹ Man kann die Singularität des radialen Flusses bei 0 für $\psi = \sum_{l,m} f_{lm}(r)Y_{lm}(\theta, \phi) \in \bigoplus_{l=0}^\infty \mathcal{D}(H_{r,l}) \otimes K_l$, wobei $H_{r,l}$ den radialen selbstadjungierten Hamiltonoperator und K_l den Eigenraum des Winkelanteils von $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ zum Drehimpuls l bezeichnet, wie folgt abschätzen. Aus $H_{r,l}f_{lm} \in L^2(\mathbb{R}^+, r^2 dr)$ folgt für das schlimmste Verhalten von f_{lm} bei $r \sim 0$, daß $f_{lm} \sim r^\alpha$ mit $\alpha > 1/2$ für $l \geq 1$ bzw. $\alpha = -1$ für $l = 0$ (die Terme der führenden Ordnung heben sich auf). Wenn man nun den radialen Strom $j_r^\psi = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$ berechnet, findet man als schlimmstes Verhalten bei $r \sim 0$, daß $j_r^\psi \sim r^{-3/2+\epsilon}$ (weil der Strom in 0 auf $\mathcal{D}(H_{r,0})$ für alle selbstadjungierten Erweiterungen verschwindet, vgl. den Beweis von Satz 3.1). Es folgt $\int_{\mathcal{K}^r} |j^\psi \cdot u| ds = \int_{S^2} |j_r^\psi| r^2 d\omega \sim r^{1/2+\epsilon} \rightarrow 0$ wenn $r \rightarrow 0$. Um globale Existenz der Dynamik wie in Satz 2.20 zu zeigen, muß die Zeitabhängigkeit dieser Größe untersucht werden. Die globale Existenz der eindimensionalen Bewegung für alle selbstadjungierten Erweiterungen von $H_{r,l}$ aus Satz 3.1 legt nahe, daß ausreichend zusätzliche Regularität gegeben ist.

Dies ist natürlich nicht so sehr ein ernsthaftes Problem der Theorie, als vielmehr ein — jedoch theorieinterner! — Hinweis darauf, daß die Schrödinger-Bohmsche Theorie selbstverständlich nicht die endgültige physikalische Theorie ist. Wenn man sich vorstellt, daß die Schrödinger-Bohmsche Theorie aus einer umfassenderen (möglicherweise relativistischen) Theorie in einem bestimmten (nichtrelativistischen) Limes folgt, dann ist es sehr plausibel, daß die Formsumme von $H_0 + V$ als selbstadjungierter Hamiltonoperator entsteht.

Ein ähnliches Problem stellt sich bei der freien Bewegung (d.h. $V = 0$) eines Teilchens in einer Dimension auf dem eingeschränkten Konfigurationsraum $\Omega = (0, \infty)$. Der Hamiltonoperator $H_0 = -\Delta$ auf $L^2(0, \infty)$ hat eine einparametrische Familie von selbstadjungierten Erweiterungen H_0^a , deren jeweiliger Definitionsbereich durch $\frac{\psi'(0)}{\psi(0)} = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ oder $\psi(0) = 0$ ($a = \infty$) bestimmt ist.

Wenn man diesen eingeschränkten Konfigurationsraum versteht als Limes einer Folge von Potentialen V_n^a , die gegen „ $V = 0$ für $q > 0$, $V = \infty$ für $q < 0$ “ streben, so daß $H_0 + V_n^a \rightarrow H_0^a$ in einem geeigneten Sinn gilt, stellt man fest, daß die selbstadjungierten Erweiterungen mit $a \neq \infty$ nur durch sehr speziell gewählte Potentialfolgen V_n^a approximiert werden können, während man im „generischen“ Fall H_0^∞ erhält [Šeba, AGHH, Ber]. (In [Ber] wird auch die Konvergenz der Bohmschen Bahnen in diesem Limes gezeigt.)

3.6 Die Bohmsche Mechanik gibt eine natürliche physikalische Interpretation des Stroms j als Strom von Teilchen, die sich gemäß der Dichte $|\psi|^2$ bewegen. Randbedingungen für die Selbstadjungiertheit des Hamiltonoperators von der Form $j = 0$ bei den Singularitäten oder $j(in) = j(out)$ sind deshalb natürlich für Bohmsche Mechanik. Das oben erwähnte Ergebnis einer detaillierten Analyse der selbstadjungierten Erweiterungen von $H_0 = -\Delta$ auf der Halbgeraden $(0, \infty)$ ist vom Gesichtspunkt der Bohmschen Mechanik aus naheliegend: $v^\psi(0) = 0$, d.h. $\text{Im} \frac{\psi'(0)}{\psi(0)} = 0$ oder $|\psi(0)|^2 = 0$ sind natürliche Bedingungen für die Definition einer Dynamik auf $(0, \infty)$.

Für stark singuläre Potentiale wie das $1/r^2$ -Potential werden neben unitären auch dissipative Erweiterungen des Hamiltonoperators diskutiert [Case, LaLi, Nel64]. Auch hier gibt erst eine tatsächliche Teilchendynamik wie die Bohmsche Mechanik eine Grundlage für die physikalische Argumentation: Ob eine absorbierende oder eine reflektierende Randbedingung an der Potentialsingularität anzusetzen ist, ist eine Frage an das physikalische System, ob nämlich Teilchen im Kern verschwinden — oder eben nicht. Die Selbstadjungiertheit des Hamiltonoperators

oder, äquivalent dazu, die Unitarität der Wellenfunktionsentwicklung als Axiom der Quantentheorie aufzufassen, erscheint aus der Perspektive von Bohmscher Mechanik unangemessen und auch unnötig.

Kapitel 4

Hilfssätze

4.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Kontinuitätsgleichung auf \mathcal{I}

Die Kontinuitätsgleichung (1.6) lautet in der aufgelösten Form, an der man erkennt, daß sie eine quasilineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung ist:

$$\frac{\partial \rho(q, t)}{\partial t} + v(q, t) \cdot \nabla \rho(q, t) = -\rho(q, t) \operatorname{div} v(q, t). \quad (4.1)$$

Gegeben sei das Geschwindigkeitsfeld $v \in C^\infty(\mathcal{G}, \mathbb{R}^d)$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ offen, und die Anfangsbedingung $\rho(\cdot, 0) = \rho_0 \in C^1(\mathcal{G}_0)$. Wir betrachten das zugehörige charakteristische System

$$\dot{q} = v(q, t) \quad (4.2)$$

$$\dot{z} = -z \operatorname{div} v(q, t). \quad (4.3)$$

$Q(t; q_0)$ bezeichne wie immer die maximale Lösung von (4.2) auf dem offenen Existenzintervall $E(q_0)$ zum Anfangswert $Q(0; q_0) = q_0 \in \mathcal{G}_0$. Die lineare Differentialgleichung (4.3) hat für alle Anfangswerte $z_0 \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung $Z(t; q_0, z_0)$ auf $E(q_0)$

$$Z(t; q_0, z_0) = z_0 \exp \left(- \int_0^t \operatorname{div} v(Q(s; q_0), s) ds \right).$$

Wir formulieren den Satz über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Kontinuitätsgleichung auf $\mathcal{I} = \{(q, t) \in \mathcal{G} : \exists q_0 \in \mathcal{G}_0 \text{ mit } t \in E(q_0) \text{ und } q = Q(t; q_0)\}$ (vgl. z.B. [CHII], Kapitel 2):

Satz 4.1 a) $\rho(Q(t; q_0), t) := Z(t; q_0, \rho_0(q_0))$ ist Lösung von (4.1) auf \mathcal{I} .
b) Sei $\mathcal{J} \subset \mathcal{G}$ offen, $\rho \in C^1(\mathcal{J})$ mit $\rho(\cdot, 0) = \rho_0$. Setze $z(t; q_0) := \rho(Q(t; q_0), t)$ für $q_0 \in \mathcal{G}_0$, $t \in E(q_0)$ mit $(Q(t; q_0), t) \in \mathcal{J}$. Dann gilt

$$\frac{dz}{dt} = -\operatorname{div} v(Q(t; q_0), t) z(t; q_0).$$

Beweis durch Nachrechnen. □

Teil a) garantiert die Existenz einer Lösung ρ von (4.1) auf \mathcal{I} zur Anfangsbedingung ρ_0 , und aus Teil b) folgt die Eindeutigkeit von ρ auf \mathcal{I} aus der Eindeutigkeit der Lösung des charakteristischen Systems. Gleichung (2.9) identifiziert die Darstellung von ρ_t in Satz 4.1 a) mit der Darstellung als Bildichte (2.11).

4.2 Meßbarkeit der Ein- und Austrittszeiten

Lemma 4.2 Die in Abschnitt 2.3.2 definierten n -ten Ein- und Austrittszeiten $T_n^\Sigma(q_0)$ und $A_n^\Sigma(q_0)$ der Lösung Q von (1.2) zu Anfangswerten $(q_0, 0)$ in eine relativ abgeschlossene Teilmenge Σ von \mathcal{G} sind (Borel-) meßbare Funktionen von $q_0 \in \mathcal{G}_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis durch Induktion: Für $q_0 \in (\mathcal{G} \setminus \Sigma)_0$ ist $T_1^\Sigma(q_0) = \tau^{\mathcal{G} \setminus \Sigma}(q_0)$, wobei $\tau^{\mathcal{G} \setminus \Sigma}(q_0)$ die obere Grenze des Existenzintervalls der maximalen Lösung von (1.2) zu Anfangswerten $(q_0, 0)$ auf der offenen Menge $\mathcal{G} \setminus \Sigma$ bezeichnet. $\tau^{\mathcal{G} \setminus \Sigma}$ ist unterhalbstetig (vgl. Abschnitt 2.2.1). Für $q_0 \in \Sigma_0$ ist $T_1^\Sigma(q_0) = 0$, insgesamt ist also T_1^Σ eine meßbare Funktion.

Sei T_n^Σ meßbar. Wir zeigen, daß A_n^Σ meßbar ist. Für q_0 mit $T_n^\Sigma(q_0) = \tau(q_0)$ wurde $A_n^\Sigma(q_0) = \tau(q_0)$ gesetzt, A_n^Σ ist also auf dieser Menge meßbar. Für q_0 mit $T_n^\Sigma(q_0) < \tau(q_0)$ betrachten wir für $k \in \mathbb{N}$ eine Folge von offenen $1/k$ -Umgebungen Σ_k von Σ . Die Abbildung $q_0 \mapsto Q(T_n^\Sigma(q_0); q_0)$ ist meßbar. Wir bezeichnen mit $\tau^{\mathcal{G} \cap \Sigma_k}(Q(T_n^\Sigma(q_0); q_0), T_n^\Sigma(q_0))$ die obere Grenze des Existenzintervalls der maximalen Lösung von (1.2) zu Anfangswerten $(Q(T_n^\Sigma(q_0); q_0), T_n^\Sigma(q_0))$ auf der offenen Menge $\mathcal{G} \cap \Sigma_k$; damit sind für alle $k \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$A_n^{\Sigma_k}(q_0) := \tau^{\mathcal{G} \cap \Sigma_k}(Q(T_n^\Sigma(q_0); q_0), T_n^\Sigma(q_0))$$

meßbar. $A_n^{\Sigma_k}(q_0)$ ist absteigend in k , folglich existiert der Limes

$$\tilde{A}_n^\Sigma := \lim_{k \rightarrow \infty} A_n^{\Sigma_k}$$

und ist meßbar. Für alle k ist $A_n^{\Sigma_k} \geq A_n^\Sigma$, deshalb gilt $\tilde{A}_n^\Sigma \geq A_n^\Sigma$. Für $t^* \in (T_n^\Sigma(q_0), \tau(q_0))$ mit $(Q(t^*; q_0), t^*) \notin \Sigma$ ist $\text{dist}((Q(t^*; q_0), t^*), \Sigma) > 0$ weil $\mathcal{G} \setminus \Sigma$ offen ist. Folglich ist $A_n^{\Sigma_k}(q_0) < t^*$ für k groß genug, und deshalb ist auch $\tilde{A}_n^\Sigma(q_0) < t^*$. Es folgt $\tilde{A}_n^\Sigma \leq A_n^\Sigma$; insgesamt gilt also $\tilde{A}_n^\Sigma = A_n^\Sigma$ und A_n^Σ ist meßbar.

Abschließend zeigen wir, daß auch T_{n+1}^Σ meßbar ist. Es genügt wieder, die Menge der $q_0 \in \mathcal{G}_0$ mit $A_n^\Sigma(q_0) < \tau(q_0)$ zu betrachten. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$T_{n+1}^{\Sigma,k}(q_0) := \tau^{\mathcal{G} \setminus \Sigma}(Q(A_n^\Sigma(q_0) + 1/k; q_0), A_n^\Sigma(q_0) + 1/k)$$

für q_0 mit $A_n^\Sigma(q_0) + 1/k < \tau(q_0)$ und $(Q(A_n^\Sigma(q_0) + 1/k; q_0), A_n^\Sigma(q_0) + 1/k) \notin \Sigma$ und setzen

$$T_{n+1}^{\Sigma,k}(q_0) := A_n^\Sigma(q_0) + 1/k$$

für q_0 mit $A_n^\Sigma(q_0) + 1/k \geq \tau(q_0)$ oder $(Q(A_n^\Sigma(q_0) + 1/k; q_0), A_n^\Sigma(q_0) + 1/k) \in \Sigma$. Auch diese Funktionen sind meßbar, und $T_{n+1}^{\Sigma,k}(q_0)$ ist absteigend in k . Folglich existiert der Limes

$$\tilde{T}_{n+1}^\Sigma := \lim_{k \rightarrow \infty} T_{n+1}^{\Sigma,k}$$

und ist meßbar. Für q_0 mit $T_{n+1}^\Sigma(q_0) > A_n^\Sigma(q_0)$ ist $T_{n+1}^{\Sigma,k}(q_0) = T_{n+1}^\Sigma(q_0)$ für $k > (T_{n+1}^\Sigma(q_0) - A_n^\Sigma(q_0))^{-1}$. Für q_0 mit $T_{n+1}^\Sigma(q_0) = A_n^\Sigma(q_0)$ liest man an der Definition der Eintrittszeit T_{n+1}^Σ ab, daß es für alle $\epsilon > 0$ ein $s(\epsilon)$ gibt mit $s(\epsilon) \in (A_n^\Sigma(q_0), A_n^\Sigma(q_0) + \epsilon)$ und $(Q(s(\epsilon); q_0), s(\epsilon)) \in \Sigma$. Es folgt $T_{n+1}^{\Sigma,k}(q_0) \leq s(\epsilon)$ für $k > (s(\epsilon) - A_n^\Sigma(q_0))^{-1}$; und deshalb ist $\tilde{T}_{n+1}^\Sigma(q_0) = A_n^\Sigma(q_0) = T_{n+1}^\Sigma(q_0)$ auch für diese q_0 . Damit ist insgesamt $\tilde{T}_{n+1}^\Sigma = T_{n+1}^\Sigma$ und T_{n+1}^Σ ist meßbar. \square

4.3 Eine Ungleichung

Lemma 4.3 Für $\psi \in \mathcal{Q}(H_0)$ und $d \geq 3$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\psi|^2}{4|\mathbf{y}_l - \mathbf{a}_l|^2} dq \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \psi|^2 dq. \quad (4.4)$$

Beweis Dies kann aus der folgenden wohlbekanntten Ungleichung abgeleitet werden: für $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi|^2}{4r^2} d\mathbf{r} \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi|^2 d\mathbf{r} \quad (4.5)$$

(siehe z.B. [RSII], Kapitel X.2). Man wähle eine Basis im \mathbb{R}^d mit Nullpunkt auf \mathcal{S}_l und y_l^1, y_l^2, y_l^3 als ersten 3 Basisvektoren. Dann ist $\mathbf{y}_l - \mathbf{a}_l$ die Abbildung $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^3$, $q = (q_1, \dots, q_d) \mapsto (q_1, q_2, q_3)$. Sei $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Für alle festgehaltenen q_4, \dots, q_d ist $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, und es gilt mit (4.5)

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi|^2}{4(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)} dq_1 dq_2 dq_3 \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right|^2 dq_1 dq_2 dq_3.$$

Damit gilt für $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\psi|^2}{4|\mathbf{y}_l|^2} dq &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right|^2 dq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right|^2 + \dots + \left| \frac{\partial \psi}{\partial q_d} \right|^2 dq = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \psi|^2 dq. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Weil $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $\mathcal{Q}(H_0)$ bezüglich der durch das Skalarprodukt $q_{H_0}(\phi, \psi) + (\phi, \psi)$ induzierten Norm $\| \cdot \|_{H_0}$ ist (siehe z.B. [Wei], Kapitel 10), kann die Ungleichung auf $\mathcal{Q}(H_0)$ ausgedehnt werden: Zu $\phi \in \mathcal{Q}(H_0)$ gibt es eine Folge (ϕ_n) , $\phi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\phi_n \rightarrow \phi$ in der $\| \cdot \|_{H_0}$ -Norm. Aus der Dreiecksungleichung für $\sqrt{q_{H_0}(\cdot, \cdot)}$ (siehe z.B. [Wei], Kapitel 1) folgt $q_{H_0}(\phi_n, \phi_n) \rightarrow q_{H_0}(\phi, \phi)$. Aus der Ungleichung (4.6) folgt mit $\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \psi|^2 dq \leq M q_{H_0}(\psi, \psi)$ (vgl. (2.28)), daß $\frac{1}{2|\mathbf{y}_l|} \phi_n$ eine L^2 -Cauchyfolge ist, denn

$$\left\| \frac{1}{2|\mathbf{y}_l|} (\phi_n - \phi_m) \right\|^2 \leq M q_{H_0}(\phi_n - \phi_m, \phi_n - \phi_m) \rightarrow 0$$

Damit folgt die Behauptung (4.4). □

Die Ungleichung (4.5) wird in [RSII] “uncertainty principle lemma” genannt, denn sie bestätigt ein auf der Unschärferelation beruhendes heuristisches Argument, daß für negative (attraktive) singuläre Potentiale der Form $r^{-\alpha}$ für $0 < \alpha < 2$ der Hamiltonoperator nach unten beschränkt ist ([RSII], S. 323). Eine eindimensionale Ungleichung von diesem Typ geht auf Hardy zurück ([HLiP], S. 246); für eine systematische Darstellung von verallgemeinerten Hardy-Ungleichungen siehe [KaWal].

Literaturverzeichnis

- [Alb92] D.Z. Albert: *Quantum Mechanics and Experience* (Harvard University Press, Cambridge 1992).
- [Alb94] D.Z. Albert: Bohm's alternative for quantum mechanics. *Scientific American*, Mai 1994, 32–39.
- [AGHH] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden: *Solvable Models in Quantum Mechanics* (Springer, New York 1988).
- [Arn] V.I. Arnol'd: Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Russian Math. Surveys* **18**(6), 85–191 (1963). Auch: *Mathematische Methoden der klassischen Mechanik* (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1988).
- [BarFl] M. Barner, F. Flohr: *Analysis II* (de Gruyter, Berlin 1983).
- [Bell] J.S. Bell: *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge 1987).
- [Ber] L. Beraha: Diplomarbeit. Universität München 1994.
- [BeG] K. Berndl, S. Goldstein: Comment on “Quantum mechanics, local realistic theories, and Lorentz-invariant realistic theories.” *Phys. Rev. Lett.* **72**, 780 (1994).
- [BeDGZ] K. Berndl, D. Dürr, S. Goldstein, N. Zanghì: Towards a relativistic quantum theory of particles (having trajectories). In Vorbereitung.
- [BovN] S. Bochner, J. von Neumann: On compact solutions of operational-differential equations I. *Annals of Math.* **36**, 255–291 (1935).
- [B52] D. Bohm: A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables I, II. *Phys. Rev.* **85**, 166–179, 180–193 (1952).

- [BHi93] D. Bohm, B.J. Hiley: *The Undivided Universe: An Ontological Interpretation of Quantum Theory* (Routledge, London 1993).
- [Car] E.A. Carlen: Conservative diffusions. *Commun. Math. Phys.* **94**, 293–315 (1984).
- [Case] K.M. Case: Singular potentials. *Phys. Rev.* **80**, 797–806 (1950).
- [CHII] R. Courant, D. Hilbert: *Methoden der Mathematischen Physik II* (Springer, Berlin 1968).
- [Da] M. Daumer: Dissertation. Universität München 1995.
- [DaDGZ] M. Daumer, D. Dürr, S. Goldstein, N. Zanghì: On the role of operators in quantum theory. In Vorbereitung.
- [Dia] F.N. Diacu: *Singularities of the N-body problem* (Les Publications CRM, Montréal 1992). Auch: Painlevé’s Conjecture. *Mathematical Intelligencer* **15**, 6–12 (1993).
- [DGZ90] D. Dürr, S. Goldstein, N. Zanghì: On a realistic theory for quantum physics. In: S. Albeverio, G. Casati, U. Cattaneo, D. Merlini, R. Moresi (Hrsg.): *Stochastic Processes, Physics and Geometry* (World Scientific, Singapore 1990).
- [DGZ92a] D. Dürr, S. Goldstein, N. Zanghì: Quantum equilibrium and the origin of absolute uncertainty. *J. Stat. Phys.* **67**, 843–907 (1992).
- [DGZ92b] D. Dürr, S. Goldstein, N. Zanghì: Quantum mechanics, randomness, and deterministic reality. *Phys. Lett. A* **172**, 6–12 (1992).
- [D94] D. Dürr: *Mathematische Grundlagen der Quantentheorie*. Vorlesung, Universität München 1994.
- [DGZ94] D. Dürr, S. Goldstein, N. Zanghì: Bohmian mechanics, identical particles, parastatistics, and anyons. In Vorbereitung.
- [Far] W.G. Faris: *Self-adjoint Operators* (Springer Lecture Notes in Mathematics 433, Berlin 1975).
- [Fey] R. Feynman: *The Character of Physical Law* (MIT Press, Cambridge 1967).

- [For] O. Forster: *Analysis 3* (Vieweg, Braunschweig 1984).
- [Fri] K. Friedrichs: Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren. Zweiter Teil. *Math. Annalen* **109**, 685–713 (1934).
- [Ger] J.L. Gerver: The existence of pseudocollisions in the plane. *J. Differential Equations* **89**, 1–68 (1991).
- [GL] S. Goldstein, J.L. Lebowitz: Does the wave function provide a complete description of physical reality? In: H. Stroke (Hrsg.): *The Physical Review: The First Hundred Years* (AIP Press, New York 1994).
- [HLiP] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya: *Inequalities* (Cambridge University Press, Cambridge 1934).
- [Har92] L. Hardy: Quantum mechanics, local realistic theories, and Lorentz-invariant realistic theories. *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2981–2984 (1992).
- [Har94] L. Hardy: Reply. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 781 (1994).
- [Hei] W. Heisenberg: *Quantentheorie und Philosophie* (Reclam, Stuttgart 1979).
- [Hol] P.R. Holland: *The Quantum Theory of Motion* (Cambridge University Press, Cambridge 1993).
- [Hun] W. Hunziker: On the space-time behavior of Schrödinger wavefunctions. *J. Math. Phys.* **7**, 300–304 (1966).
- [JöRe] K. Jörgens, F. Rellich: *Eigenwerttheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen* (Springer, Berlin 1976).
- [KaWal] H. Kalf, J. Walter: Strongly singular potentials and essential self-adjointness of singular elliptic operators in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. *J. Funct. Anal.* **10**, 114–130 (1972).
- [Kato51] T. Kato: Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type. *Trans. Am. Math. Soc.* **70**, 195–211 (1951).
- [Kato66] T. Kato: *Perturbation Theory for Linear Operators* (Springer, Berlin 1966).

- [Kel] J.L. Kelley: *General Topology* (van Nostrand, Princeton 1955).
- [KnKap] H.W. Knobloch, F. Kappel: *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (Teubner, Stuttgart 1974).
- [Kow] H.J. Kowalsky: *Vektoranalysis II* (de Gruyter, Berlin 1976).
- [LaLi] L.D. Landau, E.M. Lifschitz: *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band III, Quantenmechanik* (Akademie, Berlin 1988).
- [MaMcG] J. Mather, R. McGehee: Solutions of the collinear four body problem which become unbounded in finite time. In: J. Moser (Hrsg.): *Dynamical Systems: Theory and Applications* (Springer, Berlin 1975).
- [Mos] J. Moser: *Stable and Random Motions in Dynamical Systems* (Princeton University Press, Princeton 1973).
- [Nel64] E. Nelson: Feynman integrals and Schrödinger equation. *J. Math. Phys.* **5**, 332–343 (1964).
- [Nel85] E. Nelson: *Quantum Fluctuations* (Princeton University Press, Princeton 1985).
- [PhDeHi] C. Philippidis, C. Dewdney, B.J. Hiley: Quantum interference and the quantum potential. *Il Nuovo Cimento* **52B**, 15–28 (1979).
- [Rau] J. Rauch: *Partial Differential Equations* (Springer, New York 1991).
- [RSI] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics I* (Academic Press, Orlando 1980).
- [RSII] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics II* (Academic Press, San Diego 1975).
- [Rud] W. Rudin: *Functional Analysis* (McGraw Hill, New York 1991).
- [Saa] D.G. Saari: A global existence theorem for the four-body problem of Newtonian mechanics. *J. Differential Equations* **26**, 80–111 (1977).
- [Šeba] P. Šeba: Schrödinger particle on a half line. *Lett. Math. Phys.* **10**, 21–27 (1985).
- [Sim71] B. Simon: *Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms* (Princeton University Press, Princeton 1971).

- [Sim77] B. Simon: An introduction to the self-adjointness and spectral analysis of Schrödinger operators. In: W. Thirring, P. Urban (Hrsg.): *The Schrödinger Equation* (Springer, Wien 1977).
- [Wei] J. Weidmann: *Lineare Operatoren in Hilberträumen* (Teubner, Stuttgart 1976).
- [Xia] Z. Xia: The existence of noncollision singularities in Newtonian systems. *Annals of Math.* **135**, 411–468 (1992).