

# Bohmsche Mechanik und die Quantenphysik

Karin Berndt, Martin Daumer & Detlef Dürr

„Die theoretischen Physiker, die an der modernen Interpretation der Quantenmechanik arbeiten, möchten, daß die Epoche zu Ende geht, die unter dem Diktum von Niels Bohr stand: ‚Wer behauptet, über die Quantenmechanik nachdenken zu können, ohne verrückt zu werden, zeigt damit bloß, daß er nicht das Geringste davon verstanden hat.‘“ (Murray Gell-Mann, *Das Quark und der Jaguar*, Piper, München, 1994). Wir möchten auch, daß diese Epoche zu Ende geht. Unser Arbeitsgebiet ist die Bohmsche Mechanik, eine deterministische physikalische Theorie für die Bewegung von Punktteilchen, die die nichtrelativistische Quantentheorie umfaßt. Die konzeptionellen Probleme der Quantenphysik, wie das Meßproblem, bestehen in der Bohmschen Mechanik nicht. Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Bohmschen Mechanik und der Quantentheorie ist ihre Nichtlokalität.

## Quantenphysik

Quantenphysik begann mit einer Entdeckung Max Plancks im Jahre 1900: Emission und Absorption von Strahlung geschieht nur in diskreten Energieportionen, den „Quanten“. Niels Bohr und Arnold Sommerfeld schufen für diesen Prozeß des quantisierten Energieaustausches ein Atommodell, in dem Elektronen den Atomkern nur auf ausgewählten Bahnen mit quantisierten Drehimpulsen umkreisen. Sprünge zwischen solchen Bahnen sind in diesem Atommodell von der Aufnahme oder Abgabe eines Lichtquants begleitet. Das Bohrsche Postulat der diskreten Bahnen wurde dann 1923 von Louis de Broglie als Phänomen stehender Elektronenwellen interpretiert. Die zugehörige theoretische Beschrei-

bung – eine Wellengleichung für die Elektronenwelle oder  $\Psi$ -Funktion (siehe Übersicht Quantenmechanik) – wurde 1926 von Erwin Schrödinger gefunden. Max Born gelang es noch im selben Jahr, die Schrödingersche Theorie auch auf die Streuung von Teilchen anzuwenden: Streuprozesse sind eines der wichtigsten experimentellen Hilfsmittel zum Testen physikalischer Theorien. Er fand dabei die empirische Bedeutung der  $\Psi$ -Funktion als „Wahrscheinlichkeitsamplitude“, die sogenannte Bornsche Deutung:  $\rho = |\Psi(q,t)|^2$  ist die Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens am Ort  $q$  zur Zeit  $t$ .

Mit der von Niels Bohr und Werner Heisenberg entwickelten „Kopenhagener Deutung“ der Quantentheorie entstand ein leistungsfähiger Kalkül zur Beschreibung von Messungen. Darin werden Meßgrößen – Observablen – durch abstrakte mathematische Objekte, sogenannte Operatoren dargestellt. Insbesondere sollte es keine tieferliegende Physik hinter der Wellenfunktion und den quantenmechanischen Operatoren geben.

Dieser Vollständigkeitsanspruch führt bei der Anwendung der Quantenmechanik auf große Systeme unweigerlich auf das sogenannte Meßproblem (Abbildung 3). Es gibt

zwei Wege, dem Meßproblem zu entgehen. Die eine Möglichkeit besteht darin, die Wellenfunktion als vollständige Beschreibung der physikalischen Welt anzusehen. Dann muß aber die Schrödingergleichung durch eine zufallsabhängige Gleichung ersetzt werden, in der dem „Kollaps“ (Abbildung 3) Rechnung getragen wird. Es ergeben sich experimentell überprüfbare Vorhersagen, die sich von denen der Quantenmechanik unterscheiden. Allerdings besteht die Gefahr, mit dem experimentell schon gesicherten Gültigkeitsbereich der Schrödingergleichung in Konflikt zu kommen. Ein vielversprechender Ansatz ist die spontane Kollapstheorie von G.C. Ghirardi, A. Rimini und T. Weber (Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems, *The Physical Review D* 34, 470-491 (1986)).

Die andere Möglichkeit war bereits bei de Broglie und Born vorgezeichnet und ist ohnehin Bestandteil der quantenmechanischen Sprechweise. Meint man mit einem quantenmechanischen  $N$ -Teilchensystem eben ein System von  $N$  Teilchen, so fehlen zu einer vollständigen Zustandsbeschreibung auf jeden Fall die Teilchenorte. David Bohm fand im Jahr 1952 eine Theorie für die Bewegung von Punktteilchen, in der die

Abbildung 1a: Berechnete Bohmsche Teilchenbahnen zu verschiedenen Anfangsorten bei einem Doppelspaltmodell (mit Elektronen der Energie 45 keV, Abstand der Spaltzentren  $10^{-4}$  cm, Spaltbreite  $10^{-3}$  cm, Abstand zum Schirm 35 cm). Aufgrund der Symmetrie der Anordnung kann man am Auftreffpunkt am Schirm ablesen, durch welchen Spalt das Teilchen gegangen ist. Nach C. Philippidis, C. Dewdney, B.J. Hiley: *Quantum interference and the quantum potential. Il Nuovo Cimento* 52B, 15-28 (1979).

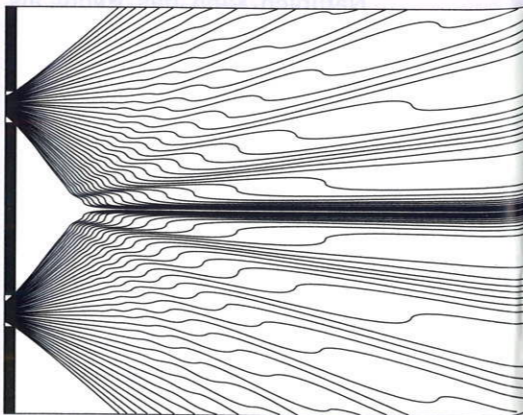


Abbildung 2: David Bohm (1917-1992), Begründer einer deterministischen Quantenphysik, im Jahr 1989. Er lehrte zuletzt am Birkbeck College in London. (Aus [1].)

Wellenfunktion als Führungsfeld wirkt (A suggested interpretation of the quantum theory in terms of „hidden“ variables I, II. *The Physical Review* 85, 166-179, 180-193 (1952)).

## Bohmsche Mechanik

Die Quantenmechanik liefert zu jeder Wellenfunktion eine Wahrscheinlichkeitsdichte und einen zugehörigen Strom. Ein Strom ist aber das Produkt aus Geschwindigkeit und Dichte,  $\mathbf{j} = \mathbf{v}\rho$ , also erhält man mit  $\mathbf{v} = \mathbf{j}/\rho$  ein Geschwindigkeitsfeld. Dies ist das Bohmsche Geschwindigkeitsfeld. Das physikalische Gesetz für die Bewegung der Teilchen der Bohmschen Mechanik besagt, daß sich die Teilchenbahnen  $\mathbf{Q}(t)$  an die-

ses Geschwindigkeitsfeld anschmiegen:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{v} = \frac{\mathbf{j}}{\rho} \quad (1)$$

Die Wellenfunktion ist in dieser Theorie ein physikalisches Feld, das die Geschwindigkeiten der Teilchen bestimmt. Diese Mechanik ist also ganz anders als die Newtonsche Mechanik, in der Kräfte Beschleunigungen verursachen. Kraft, Impuls, Energie usw. sind keine Bohmschen Größen. Die Newtonsche Mechanik ist jedoch in der Bohmschen Mechanik als Grenzfalle enthalten.

Wir haben das Problem untersucht, ob die Bohmschen Gleichungen Lösungen haben, und konnten zeigen, daß unter sehr allgemeinen Bedingungen globale Lösungen existieren. Das analoge Problem für die Newtonsche Mechanik ist dagegen immer noch weitgehend ungelöst.

Für die Bohmsche Mechanik gilt, daß die Teilchen eines Systems mit Wellenfunktion  $\Psi(q,t)$  zu allen Zeiten gemäß  $\rho(q,t) = |\Psi(q,t)|^2$  verteilt sind, wenn man als Anfangsverteilung  $\rho(q) = |\Psi(q,0)|^2$  annimmt. Das bedeutet, daß die Teilchen sich zu allen Zeiten bevorzugt dort aufhalten, wo  $|\Psi(q,t)|^2$  groß ist. Dies reicht bereits, um die quantenmechanischen Regeln zur Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von Meßergebnissen abzuleiten!

Zunächst aber zwei Beispiele zum Verlauf von Teilchenbahnen. Betrachten wir das Elektron im Grundzustand des Wasserstoffatoms. Der Wahrscheinlichkeitsstrom und damit auch das Geschwindigkeitsfeld ist überall Null: Das Elektron ruht – irgendwo – an einem zufälligen Ort, der  $|\Psi|^2$ -verteilt ist. Ein weiteres interessantes Beispiel ist das Doppel-

spaltexperiment, das als Paradebeispiel für den Welle-Teilchen-Dualismus gilt. Einzelne Teilchen werden nacheinander auf einen Doppelspalt geschickt und treffen dahinter auf einer Photoplatte auf. Es entsteht Punkt für Punkt ein Interferenzbild mit hellen und dunklen Streifen. Wenn nur ein Spalt offen ist, sieht man lediglich eine breite Verteilung von Punkten. In der Bohmschen Mechanik wird dieses Experiment folgendermaßen beschrieben: Die Wellenfunktion  $\Psi$  entwickelt im Doppelspaltexperiment das Interferenzmuster und die Teilchen bewegen sich auf den durch  $\Psi$  gemäß (1) bestimmten Bahnen (Abb. 1a), wobei ihre Orte  $|\Psi|^2$ -verteilt sind. Wenn nur ein Spalt offen ist, entwickelt die Wellenfunktion keine Interferenz, sondern lediglich ein Beugungsbild.

## Die Bornsche Deutung

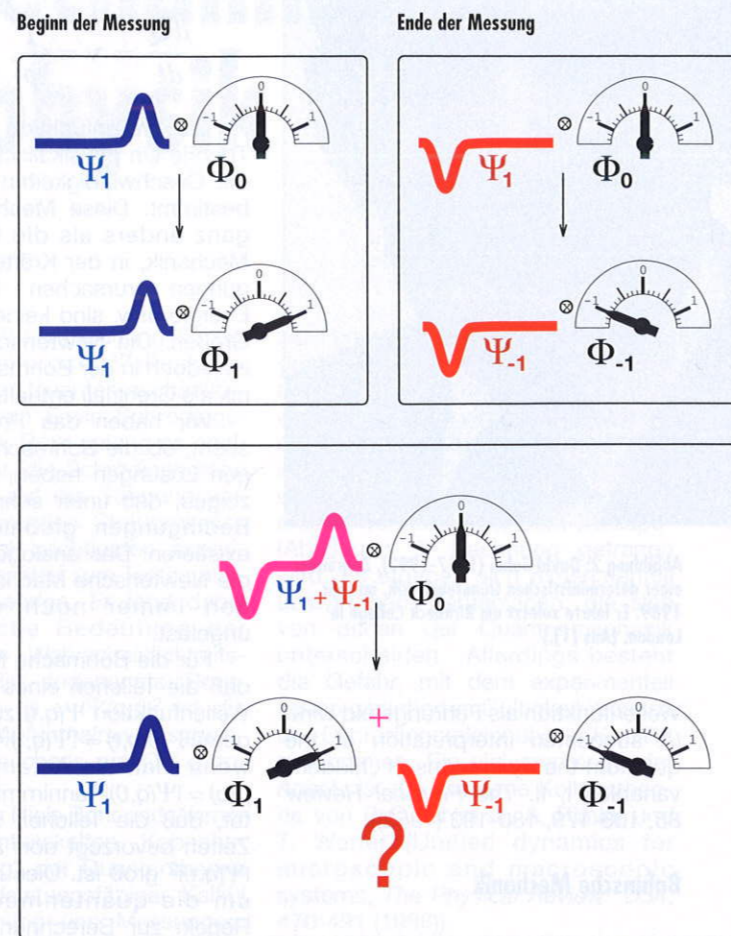
Bohmsche Mechanik ist eine deterministische Theorie: Die Wellenfunktion bewegt sich so, wie es die Schrödingergleichung vorschreibt und die Teilchenorte bewegen sich so, wie es die Wellenfunktion bestimmt. Sind die Anfangswellenfunktion und die Anfangsorte aller Teilchen festgelegt, so ist der weitere Lauf vorherbestimmt. Dies gilt insbesondere für unser Universum als Ganzes: die Bohmsche Mechanik beschreibt unsere Welt als Uhrwerk. Wie kann dann die Bornsche statistische Deutung gelten? Wo kommt der Zufall her, wenn alles vorherbestimmt ist?

Nun, zufällige Verteilungen werden durch Wiederholungen des gleichen Experiments an gleichartigen kleinen Teilsystemen gewonnen, also in Versuchsreihen, und darin steckt der Zufall. Wir müssen folglich erst einmal untersuchen, wie Teilsysteme des Universums, etwa ein einzelnes Wasserstoffatom, beschrieben werden. Die Möglichkeit einer effektiven Beschreibung eines Teilsystems in der Newtonschen Mechanik, etwa eines vom Baum fallenden Apfels, ist relativ leicht einsehbar, denn voneinander weit entfernte Körper beeinflussen sich wenig: Weder die Sonne und noch weniger die Fixsterne brauchen uns beim Fall des Apfels zu kümmern. In der Bohmschen Mechanik hängt aber in der Regel die Bewegung eines bestimmten Teilchens von den Orten *aller anderer* Teilchen ab, wie weit diese auch immer entfernt sein mögen. (Auf diese Nichtlokalität gehen wir im letzten

Abbildung 1b: Aufbau eines Elektroneninterferenzmusters im Experiment: nach 10, 100, 3000, 20000, 70000 Treffern (von links nach rechts). A. Tanomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki, H. Ezawa, *American Journal of Physics* 57, 117-120 (1989).

### Abbildung 3: Das Meßproblem

Wir betrachten ein quantenmechanisches Experiment: ein mikroskopisches System wird an einen Meßapparat gekoppelt, der ebenfalls quantenmechanisch beschrieben wird, und in der Nullstellung die Wellenfunktion  $\Phi_0$  hat. Im einfachsten Fall hat der Apparat am Ende der Messung die Wellenfunktion  $\Phi_1$ , entsprechend einer Zeigerstellung „1“, wenn das mikroskopische System die Wellenfunktion  $\Psi_1$  hat, und  $\Phi_{-1}$  entsprechend „-1“ bei der Wellenfunktion  $\Psi_{-1}$ . Wenn die Wellenfunktion des mikroskopischen Systems zu Beginn der Messung eine Überlagerung  $\Psi_1 + \Psi_{-1}$  ist, so folgt allein aus dem Superpositionsprinzip der Quantenmechanik, daß sich am Ende der Messung das Gesamtsystem in einer Überlagerung von Wellenfunktionen, die den verschiedenen Zeigerstellungen entsprechen, befindet. Aber so etwas gibt es nicht – niemand kann sagen, was das überhaupt bedeuten sollte. Die Theorie ist also in dieser Form nicht in der Lage, dem einfachen Sachverhalt Rechnung zu tragen, daß sich Meßapparate nicht in quantenmechanischen Überlagerungen befinden. Dabei spielt die Größe oder Komplexität des Meßapparates keine Rolle: Je größer er ist, umso bizarrer wird das Meßproblem. (Schrödinger hat eine Katze als „Apparat“ diskutiert, die durch ihr Leben oder ihren Tod „anzeigt“, ob durch einen Atomzerfall eine Giftampulle zerschlagen wurde oder nicht. Entsprechend liegt am Ende der Messung eine Überlagerung aus der lebenden und der toten Katze vor.) Um diese Inkonsistenz zu beheben, hat John von Neumann in die Quantenmechanik eine „Kollapsregel“ eingeführt: am Ende der Messung wird die Schrödingersche Zeitentwicklung der Wellenfunktion außer Kraft gesetzt und aus der Überlagerung der Wellenfunktionen gemäß der Bornschen Regel die eine oder die andere als neue Wellenfunktion zufällig ausgewählt.



Abschnitt ein.) Also muß es in der Bohmschen Mechanik einen anderen Mechanismus geben, der Teilsysteme vom Universum effektiv abkoppelt.

Man findet einen solchen Mechanismus zum Beispiel in Meßsituationen. Ihre Analyse führt zum Begriff der effektiven Wellenfunktion für ein Teilsystem [7]. Im Beispiel von Abbildung 3 ist die effektive Wellenfunktion im Fall der Zeigerstellung 1 die Funktion  $\Psi_1$ . Der andere Zweig der Wellenfunktion spielt für die Bewegung der Teilchen praktisch keine Rolle mehr: die Wellenfunktion ist „kollabiert“.

Wir haben für die Bohmsche Mechanik gezeigt, daß in einem Ensemble von gleichartigen (kleinen) Teilsystemen, die alle die effektive Wellenfunktion  $\Psi$  besitzen, die Orte der Systemteilchen typischerweise  $|\Psi|^2$ -verteilt sind [7]. Die Bornsche

Deutung gilt also für effektive Wellenfunktionen von Teilsystemen, und sie ergibt sich als Konsequenz der Bohmschen Mechanik.

#### Observable und andere beobachtbare Größen

Wie ist nun der Zusammenhang zwischen der Bohmschen Mechanik und dem Formalismus der Quantenmechanik? Man kann zeigen, daß sich die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Meßwerten in Bohmscher Mechanik immer durch positivoperatorwertige Maße (POVs) ausdrücken lassen, und daß man in idealisierten Situationen den üblichen Operatorenkalkül erhält. Die Observablen sind hierbei keine Meßgrößen, sondern lediglich mathematische Hilfsmittel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen von

Meßwerten. So ist eine Impulsmessung nicht etwa die Messung von „Masse mal Bohmscher momentaner Geschwindigkeit“, sondern beispielsweise die Messung des asymptotischen Impulses eines freien Teilchens mit der Wellenfunktion  $\Psi$ , also eigentlich die Messung von

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{mQ(t, q_0)}{t}$$

wobei  $q_0$  der Anfangsort des Teilchens ist, der gemäß  $|\Psi|^2$  verteilt ist. Es gilt dann, daß der asymptotische Impuls gemäß der Spektralverteilung des Impulsoperators verteilt ist. Es folgt die kanonische Vertauschungsrelation

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$$

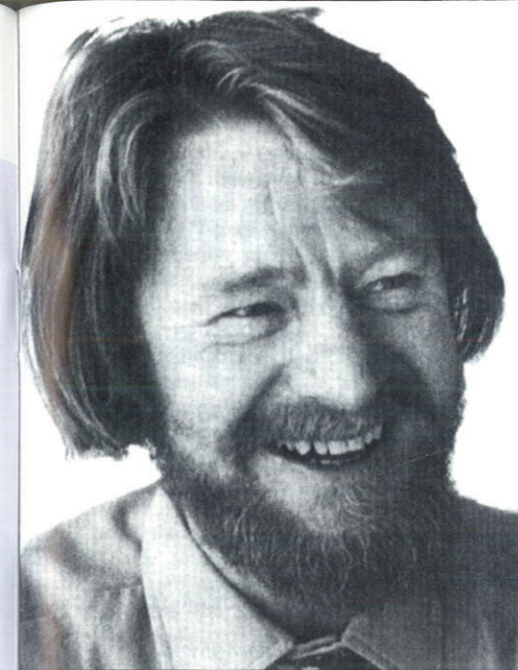


Abbildung 4: John Stewart Bell (1928-1990) ist berühmt für seine Arbeiten zur quantenmechanischen Nichtlokalität. Er arbeitete am europäischen Kernforschungszentrum CERN bei Genf.

und die Heisenbergsche Unschärferelation

$$\Delta \hat{Q} \Delta \hat{P} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Sie besagt, daß die asymptotischen Impulse um so stärker streuen, je konzentrierter die anfängliche Wellenfunktion ist.

Betrachten wir nun ein Streuexperiment. Die Detektoren sind in großer Entfernung um das Streugeschehen angeordnet, und irgendeiner der Detektoren klickt zu einer zufälligen Zeit. Es ist bewiesen worden, daß es für diese Ankunftszeit keine quantenmechanische Observable gibt. Dies beunruhigt allerdings in der Praxis wenig, da Formeln zur Verfügung stehen, mit denen die Ortsverteilung der Klicks im Grenzfall großer Abstände berechnet werden kann. Dies reicht für die meisten praktischen Probleme aus.

Was aber sind die richtigen Formeln für die Verteilung der Ankunftszeiten und -orte im allgemeinen? Diese Verteilungen können in der Bohmschen Mechanik berechnet werden. Es klickt natürlich der Detektor, bei dem das Teilchen ankommt. Im einfachsten Fall verlassen die Bahnen das Gebiet, ohne zurückzukehren. Dann ist die Wahrscheinlichkeit einfach durch den Quantenfluß gegeben:  $\mathbf{j}(q, t) \cdot d\sigma$  ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen das Flächenelement  $d\sigma$  zur Zeit  $t$  kreuzt [6]. Diese Formel stellt sich als grundlegend für die Streutheorie heraus.

### Übersicht Quantenmechanik

Die Schrödingergleichung für die komplexwertige Wellenfunktion  $\Psi$  eines physikalischen Systems von  $N$  Teilchen mit Massen  $m_1, \dots, m_N$  lautet:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t) = - \sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} \left( \frac{\partial}{\partial q_k} \right)^2 \Psi(q, t) + V(q) \Psi(q, t).$$

$i = \sqrt{-1}$  ist dabei die komplexe Einheit.  $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}$  Js bezeichnet das Plancksche Wirkungsquantum,  $\mathbf{q}_k = (x_k, y_k, z_k)$  den Ort des  $k$ -ten Teilchens und  $q = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N)$  die Konfiguration.  $V$  ist das Wechselwirkungspotential, beispielsweise beim Wasserstoffatom die elektrostatische Anziehung zwischen dem Atomkern und dem Elektron.  $\partial/\partial \mathbf{q}_k$  bezeichnet die partielle Ableitung nach dem Ort des  $k$ -ten Teilchens. Für die Lösungen der Schrödingergleichung gilt das Superpositionsprinzip: Die Summe zweier Lösungen ist wieder eine Lösung. Gemäß der Bornschen Deutung wird

$$\rho(q, t) = \Psi^*(q, t) \Psi(q, t) = |\Psi(q, t)|^2$$

(\* bezeichnet die komplexe Konjugation) als Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte der Konfiguration am Ort  $q$  zur Zeit  $t$  interpretiert, d.h.  $\int_G |\Psi(q, t)|^2 dq$  ist die Wahrscheinlichkeit, die Teilchenkonfiguration zur Zeit  $t$  im Gebiet  $G$  zu finden. Hierfür gilt die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(q, t) + \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial q_k} \cdot \mathbf{j}_k(q, t) = 0.$$

$\mathbf{j}_k(q, t) = \frac{\hbar}{2im_k} \left( \Psi^* \frac{\partial}{\partial q_k} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial q_k} \Psi^* \right)$  ist dabei der quantenmechanische

Wahrscheinlichkeitsstrom. Diese Gleichung besagt, daß sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einem Gebiet nur durch diesen ein- und ausfließenden Strom ändert.

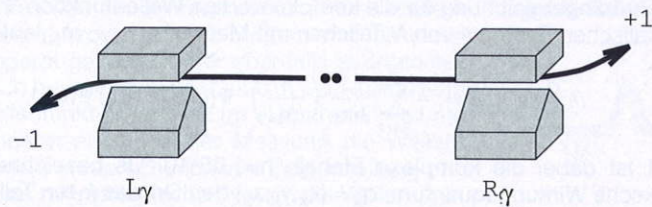
In der Quantenmechanik werden beobachtbare („observable“) Größen durch selbstadjungierte Operatoren  $A$ , die auf Wellenfunktionen wirken, dargestellt. Wichtige Operatoren sind der Ortsoperator  $Q$  und der Impulsoperator  $P$ . Die Spektralwerte eines Operators sind die möglichen Meßwerte. Deren Verteilung ist durch das Spektralmaß gegeben, das beim Ortsoperator einfach  $|\Psi(q)|^2 dq$  ist. Der Mittelwert einer Observablen  $A$  ist durch  $\langle \Psi | A | \Psi \rangle$  gegeben, wobei  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  das Skalarprodukt im Raum der Wellenfunktionen bezeichnet.

#### Nichtlokalität

Einer der bekanntesten Kritiker der Quantenmechanik war Albert Einstein; sein wichtigster Kritikpunkt findet sich in einer Arbeit mit Boris Podolsky und Nathan Rosen mit dem Titel „Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?“ (*The Physical Review* 47, 777-780 (1935)). Einstein, Podolsky und Rosen zeigen in dieser Arbeit, daß die Beschreibung eines quantenmechanischen Systems durch die Wellenfunktion alleine unvollständig ist, daß es also zusätzliche sogenannte „verborgene Parameter“ geben muß. Die wesentliche Annahme dabei ist, daß die physikalischen Wechselwirkungen lokal sind, d.h. daß sich Wirkungen nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Das Argument wird durch Diskussion eines Gedankenexperimentes

geführt. John S. Bell hat dieses Argument aufgegriffen, weitergeführt und schließlich gezeigt, daß diese verborgenen Parameter die quantenmechanischen Vorhersagen nicht reproduzieren können. Es folgt also, daß zumindest diese quantenmechanischen Vorhersagen nicht mit lokalen physikalischen Gesetzen erklärbar sind. Nun, vielleicht sind sie ja falsch? Was zu Einsteins Zeiten noch ein Gedankenexperiment war, ist in den letzten Jahren mit modernen quantenoptischen Meßtechniken tatsächlich durchgeführt worden (siehe z.B. A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, *Physical Review Letters* 49, 1804-1807 (1982)). Die Experimente bestätigen (meistens) die quantenmechanische Statistik. Dies ist sicherlich eine eindrucksvolle Bestätigung der Quantenmechanik und damit auch der Bohmschen Mechanik. Aber man ist gezwungen zu

Abbildung 5: Das Nichtlokalitätsargument von Einstein, Podolsky, Rosen und Bell



Das Einstein-Podolsky-Rosen-Experiment in einer Variante, die von Bohm angegeben wurde: Zwei Spin-1/2-Teilchen werden in einem bestimmten quantenmechanischen Zustand, dem Singulettzustand, präpariert und fliegen auseinander. Wenn sie weit voneinander entfernt sind, werden Messungen des Spins mit Stern-Gerlach-Magneten (skizziert) in Richtung  $\gamma$  an beiden Teilchen durchgeführt. Es gibt nur zwei mögliche Meßergebnisse: +1 und -1, das Teilchen fliegt nach dem Durchgang durch den Stern-Gerlach-Magnet nach oben oder nach unten. Die Meßergebnisse sind im Singulettzustand so korreliert, daß der Gesamtspin  $L_\gamma + R_\gamma = 0$  ist, d.h. eines der beiden Teilchen hat Spin +1, das andere Spin -1. Wenn also etwa  $R_\gamma = +1$  ist, ist  $L_\gamma = -1$ . Dies gilt für alle Richtungen  $\gamma$ . Man kann die Orientierungen der Magnete so kurzfristig festlegen, daß kein physikalischer Effekt, der sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, den Ausgang der Messung am jeweils anderen Ende beeinflussen kann. Wenn man nun annimmt, daß es nur derartige Effekte gibt, d.h. daß „relativistische Kausalität“ oder „Lokalität“ gilt, müssen die Meßresultate für Spinnmessungen in alle möglichen Richtungen bereits vor und unabhängig von der Messung feststehen; die Teilchen müssen diese Information in irgendeiner Form mit sich tragen. Da diese Information nicht in der quantenmechanischen Wellenfunktion enthalten ist, muß es zusätzliche sogenannte „verborgene Parameter“ geben, und die quantenmechanische Beschreibung des physikalischen Systems durch die Wellenfunktion alleine ist unvollständig. – Soweit Einstein, Podolsky und Rosen. Bell fährt fort: für die „Spininformationsparameter“  $L_\gamma$  und  $R_\gamma$  muß gelten

$$L_\alpha = L_\beta \text{ oder } L_\beta = L_\gamma \text{ oder } L_\gamma = L_\alpha$$

weil die  $L_\gamma$  nur jeweils zwei verschiedene Werte +1 und -1 annehmen können. Mit der Singulett-Korrelation  $L_\gamma = -R_\gamma$  folgt für die Wahrscheinlichkeiten  $P(L_\alpha = -R_\beta)$ , daß bei Messungen der Spins in Richtung  $\alpha$  bzw.  $\beta$  die Werte nicht übereinstimmen, die Bellsche Ungleichung

$$P(L_\alpha = -R_\beta) + P(L_\beta = -R_\gamma) + P(L_\gamma = -R_\alpha) \geq 1.$$

Diese Ungleichung ist bei geeigneter Wahl der drei Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  von den quantenmechanischen Werten für die auftretenden Wahrscheinlichkeiten verletzt.

Die Lokalitätsannahme führte in diesem Experiment zunächst auf die Existenz von verborgenen Parametern, die aber unverträglich mit den zu erklärenden quantenmechanischen Korrelationen sind. Folglich sind die quantenmechanischen Vorhersagen unverträglich mit Lokalität. Die quantenmechanischen Korrelationen in diesem Experiment sind vielfach geprüft worden und werden nach wie vor mit immer verfeinerten Methoden überprüft. Es ergibt sich (meistens) eine deutliche Bestätigung der quantenmechanischen Vorhersagen: wir müssen schließen, daß es tatsächlich instantane Fernwirkungen in der Natur gibt.

nichtrelativistischen Raum-Zeit. Eine – natürlich nichtlokale – relativistische Bohmsche Theorie, die die nichtrelativistische Bohmsche Mechanik als Grenzfall enthält und Phänomene der relativistischen Quantenphysik erklärt, stellt ein Ziel unserer Forschung dar [4].

Dr. Karin Berndl,  
Dr. Martin Daumer,  
Prof. Dr. Detlef Dürr

Mathematisches Institut der  
Universität München  
Theresienstr. 39  
80333 München

Tel. 23 94 44 77, Fax: 28 05 248  
World-Wide-Web-Adresse:  
<http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~duerr>

## LITERATUR

- [1] D.Z. Albert: *Bohm's alternative for quantum mechanics*. *Scientific American*, Mai 1994, 32-39.
- [2] J.S. Bell: *Speakable and Unspeakeable in Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge 1987).
- [3] K. Berndl, M. Daumer, D. Dürr, S. Goldstein, N. Zanghi: *A survey of Bohmian mechanics*. *Il Nuovo Cimento* 110B, 737-750 (1995).
- [4] K. Berndl, D. Dürr, S. Goldstein, N. Zanghi: *EPR-Bell nonlocality, Lorentz invariance, and Bohmian quantum theory*. [quant-ph/9510027](http://quant-ph/9510027), erscheint in *Physical Review A*.
- [5] D. Bohm, B.J. Hiley: *The Undivided Universe: An Ontological Interpretation of Quantum Theory* (Routledge, London 1993).
- [6] M. Daumer, D. Dürr, S. Goldstein, N. Zanghi: *On the quantum probability flux through surfaces*. [quant-ph/9512016](http://quant-ph/9512016), eingereicht bei *Physical Review Letters*.
- [7] D. Dürr, S. Goldstein, N. Zanghi: *Quantum equilibrium and the origin of absolute uncertainty*. *Journal of Statistical Physics* 67, 843-907 (1992).
- [8] P.R. Holland: *The Quantum Theory of Motion* (Cambridge University Press, Cambridge 1993).

## ERRATUM

Durch einen bedauerlichen Fehler des Verlags ist der Abschnitt über Nichtlokalität (S. 23/24) im Beitrag „Bohmsche Mechanik und die Quantenphysik“ von K. Berndl, M. Daumer und D. Dürr mit einer wesentlichen Lücke gedruckt worden. Hier ist der vollständige Text:

### Nichtlokalität

Einer der bekanntesten Kritiker der Quantenmechanik war Albert Einstein; sein wichtigster Kritikpunkt findet sich in einer Arbeit mit Boris Podolsky und Nathan Rosen mit dem Titel „Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?“ (*The Physical Review* 47, 777-780 (1935)). Einstein, Podolsky und Rosen zeigen in dieser Arbeit, daß die Beschreibung eines quantenmechanischen Systems durch die Wellenfunktion alleine unvollständig ist, daß es also zusätzliche sogenannte „verborgene Parameter“ geben muß. Die wesentliche Annahme dabei ist, daß die physikalischen Wechselwirkungen lokal sind, d.h. daß sich Wirkungen nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Das Argument wird durch Diskussion eines Gedankenexperimentes geführt. John S. Bell hat dieses Argument aufgegriffen, weitergeführt und schließlich gezeigt, daß diese verborgenen Parameter die quantenmechanischen Vorhersagen nicht reproduzieren können. Es folgt also, daß zumindest diese quantenmechanischen Vorhersagen nicht mit lokalen physikalischen Gesetzen erklärbar sind. Nun, vielleicht sind sie ja falsch? Was zu Einsteins Zeiten noch ein Gedankenexperiment war, ist in den letzten Jahren mit modernen quantenoptischen Meßtechniken tatsächlich durchgeführt worden (siehe z.B. A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, *Physical Review Letters* 49, 1804 (1982)). Die Experimente bestätigen (meistens) die quantenmechanische Statistik. Dies ist sicherlich eine eindrucksvolle Bestätigung der Quantenmechanik und damit auch der Bohmsche Mechanik. Aber man ist gezwungen zu schließen, daß es nichtlokale physikalische Wechselwirkungen gibt.

Wie verträglich ist das mit einem der Grundpfeiler der Einsteinschen Relativitätstheorie, der oft als „nichts geht schneller als das Licht“ formuliert wird? Nun, man kann diese nichtlokalen Korrelationen jedenfalls nicht verwenden, um Signale mit Überlichtgeschwindigkeit zu senden: die Struktur der Quantentheorie impliziert eine „statistische Lokalität“, die grobe Verletzungen der relativistischen Kausalität verhindert.

In der Bohmschen Mechanik steckt die Nichtlokalität deutlich in der Formulierung der Theorie: die Wellenfunktion ist ein physikalisches Feld auf dem Konfigurationsraum, und die Geschwindigkeit eines Teilchens hängt vom gleichzeitigen Ort aller anderer Teilchen ab. Nun beruht die Bohmsche Mechanik auf der nichtrelativistischen Raum-Zeit. Eine – natürlich nichtlokale – relativistische Bohmsche Theorie, die die nichtrelativistische Bohmsche Mechanik als Grenzfall enthält und Phänomene der relativistischen Quantenphysik erklärt, stellt ein Ziel unserer Forschung dar [4].